# Baltic Way 2006

**Turku, 3. November 2006**

Version: German

**1.** Von einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ reeller Zahlen ist folgendes bekannt:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad \text{für } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Welches ist die größte Zahl aufeinander folgender Elemente, die alle positiv sind?

**2.** Die reellen Zahlen $a_i \in [-2, 17]$, $i = 1, 2, \ldots, 59$, erfüllen $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$.
Man beweise:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006$$

**3.** Man beweise: Für jedes Polynom $P(x)$ mit reellen Koeffizienten existieren eine positive ganze Zahl $m$ und Polynome $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ mit reellen Koeffizienten mit

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

**4.** Es seien $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ nicht-negative reelle Zahlen mit $a + b + c + d + e + f = 6$. Man bestimme den maximalen Wert von

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

und ermittle alle 6-Tupel $(a, b, c, d, e, f)$, für die dieser maximale Wert angenommen wird.

**5.** Ein manchmal zerstreuter Professor hat sein letztes Buch einer gewissen binären Operation $*$ gewidmet. Angewandt auf zwei beliebige ganze Zahlen ergibt diese Operation wieder eine ganze Zahl. Diese Operation genügt den folgenden Axiomen:

a) $x * (x * y) = y$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Der Professor behauptet in seinem Buch:

1. Die Operation $*$ ist kommutativ, d.h. $x * y = y * x$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Die Operation $*$ ist assoziativ, d.h. $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Welche dieser Behauptungen folgt aus den gegebenen Axiomen?

**6.** Man bestimme die größtmögliche Anzahl von Elementen einer Menge von positiven ganzen Zahlen, die folgende Eigenschaften haben:

1. Die Zahlen bestehen aus Ziffern aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. In jeder Zahl kommt keine Ziffer mehr als einmal vor.
3. In jeder Zahl sind die Ziffern aufsteigend angeordnet.
4. Je zwei Zahlen haben mindestens eine Ziffer gemeinsam (eventuell an verschiedenen Stellen).
5. Es gibt keine Ziffer, die in allen Zahlen vorkommt.

**7.** Auf einer Party mit 10 Gästen macht ein Photograph Bilder. Jedes der 45 möglichen Paare von Gästen kommt genau auf einem Bild vor, und jedes Photo zeigt zwei oder drei Gäste. Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Photos.

**8.** Der Dekan hat herausgefunden, dass in seiner Fakultät sechs Verschwörungen laufen. Jede Verschwörung wird von genau 3 Personen getragen. Man beweise, dass der Dekan seine Fakultät so in zwei Institute zerteilen kann, dass keine der Verschwörungsgruppen zur Gänze in einem Institut sitzt.

**9.** Jeder Ecke eines regelmäßigen Fünfecks wird eine reelle Zahl zugeordnet. Die Summe dieser fünf Zahlen ist Null. Man kann die folgende Operation anwenden: An zwei benachbarten Ecken werden die Zahlen beide durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt.
Gelingt es immer, durch wiederholte Anwendung dieser Operation alle fünf Zahlen auf Null zu bringen?

**10.** In einem $30 \times 30$-Feld werden 162 Plus-Zeichen und 144 Minus-Zeichen so verteilt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens 17 Symbole stehen. (Keine Zelle enthält mehr als ein Zeichen.) Für jedes Plus-Zeichen zählen wir die Anzahl der Minus-Zeichen in seiner Zeile, und für jedes Minus-Zeichen zählen wir die Anzahl der Plus-Zeichen in seiner Spalte. Bestimme das Maximum der Summe dieser Anzahlen.

**11.** Die Höhen eines Dreiecks haben die Längen 12, 15 und 20. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks?

**12.** Es seien $ABC$ ein Dreieck, $B_1$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und $C_1$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$. Sei weiterhin $P$ der von $A$ verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke $ABC_1$ und $AB_1C$. Schließlich sei $P_1$ der von $A$ verschiedene Schnittpunkt der Geraden $AP$ mit dem Umkreis des Dreiecks $AB_1C_1$. Man beweise: $2|\overline{AP}| = 3|\overline{AP_1}|$

**13.** In einem Dreieck $ABC$ liegen die Punkte $D$ und $E$ auf den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$. Die Geraden $BE$ und $CD$ schneiden sich in $F$. Man beweise:
Wenn $|\overline{BC}|^2 = |\overline{BD}| \cdot |\overline{BA}| + |\overline{CE}| \cdot |\overline{CA}|$, dann liegen $A$, $D$, $F$ und $E$ auf einem Kreis.

**14.** Auf der Oberfläche einer Kugel werden 2006 Punkte markiert. Man beweise: Die Oberfläche kann so in 2006 kongruente Teilflächen zerlegt werden, dass innerhalb jeder Fläche genau einer dieser Punkte liegt.

**15.** Die Seitenhalbierenden des Dreiecks $ABC$ schneiden sich im Punkt $M$. Eine Gerade $t$ durch $M$ schneidet den Umkreis von $ABC$ in $X$ und $Y$; dabei liegen $A$ und $C$ auf derselben Seite von $t$. Man zeige: $|\overline{BX}| \cdot |\overline{BY}| = |\overline{AX}| \cdot |\overline{AY}| + |\overline{CX}| \cdot |\overline{CY}|$.

**16.** Gibt es vier verschiedene positive ganze Zahlen, die folgende Bedingung erfüllen: Für je zwei von ihnen ist die Summe ihres Produktes mit 2006 eine Quadratzahl?

**17.** Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen $n$ mit $n^2 \mid 3^n + 1$.

**18.** Für eine positive ganze Zahl $n$ sei mit $a_n$ die letzte Ziffer von $n^{(n^n)}$ bezeichnet. Man beweise, dass die Folge $(a_n)$ periodisch ist, und bestimme die minimale Periodenlänge.

**19.** Gibt es eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ aus positiven ganzen Zahlen, so dass für jede positive ganze Zahl $n$ die Summe von je $n$ aufeinander folgenden Elementen durch $n^2$ teilbar ist?

**20.** Eine 12-stellige positive ganze Zahl enthält nur die Ziffern 1, 5 und 9. Weiterhin ist sie durch 37 teilbar. Man beweise, dass ihre Quersumme nicht 76 sein kann.

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden. 5 Punkte pro Aufgabe.