Baltic Way 2006

Turku, 2006. gada 3. novembrī

Version: Latvian

1. Zināms, ka reālu skaitļu virknei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ izpildās sakarība

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad , n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Kāds ir lielākais iespējamais skaits pēc kārtas ņemtu šādas virknes elementu, kas visi ir pozitīvi?

2. Pieņemsim, ka reāli skaitļi $a_i \in [-2; 17]$, $i = 1, 2, \ldots, 59$, apmierina sakarību $a_1 + a_2 + \ldots + a_{59} = 0$. Pierādiet, ka

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Pierādiet, ka katram polinomam $P(x)$ ar reāliem koeficientiem var atrast tādu veselu pozitīvu skaitli m un polinomus $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_m(x)$ ar reāliem koeficientiem, ka

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

4. Pieņemsim, ka a, b, c, d, e, f ir nenegatīvi reāli skaitļi, kas apmierina sakarību $a + b + c + d + e + f = 6$. Atrodiet lielāko iespējamo izteiksmes

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

vērtību un noskaidrojiet, ar kuriem skaitļu komplektiem (a, b, c, d, e, f) šī vērtība tiek sasniegta.

5. Izklaidīgs profesors savu pēdējo grāmatu ir veltījis kādas divargumentu operācijas $*$ izpētei. Ja šo operāciju pielieto jebkuriem diviem veseliem skaitļiem, rezultāts arī ir vesels skaitlis. Ir zināms, ka operācijai izpildās sekojošas aksiomas:

a) $x * (x * y) = y$ visiem $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ visiem $x, y \in \mathbb{Z}$.

Profesors savā grāmatā apgalvo, ka

1. operācija $*$ ir komutatīva: $x * y = y * x$ visiem $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. operācija $*$ ir asociatīva: $(x * y) * z = x * (y * z)$ visiem $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Kuri no šiem apgalvojumiem izriet no minētajām aksiomām?

6. Noskaidrojiet, kāds ir lielākais iespējamais naturālu skaitļu daudzums, kam izpildās šādas īpašības:

1. Skaitļu pierakstā izmantoti cipari no kopas $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Neviens cipars nevienā skaitlī nav sastopams vairāk kā vienu reizi.
3. Cipari katrā skaitlī ir augošā secībā.
4. Katriem diviem skaitļiem ir vismaz viens kopīgs cipars (varbūt dažādās vietās).
5. Neviens cipars nav sastopams visos skaitļos.

7. Sarīkojumā, kurā piedalījās 10 cilvēki, fotogrāfs uzņēma dažas fotogrāfijas. Katrs no 45 iespējamajiem cilvēku pāriem redzams kopā tieši vienā fotogrāfijā. Katrā fotogrāfijā pavisam redzami divi vai trīs cilvēki. Kāds ir mazākais iespējamais uzņemto fotogrāfiju skaits?

8. Direktors ir noskaidrojis, ka viņa iestādē pastāv sešas sazvērestības un katrā sazvērestībā piedalās tieši trīs darbinieki. Pierādiet, ka direktors var sadalīt iestādi divās laboratorijās tā, lai nevienā laboratorijā nebūtu 3 cilvēku, kuri piedalās vienā un tajā pašā sazvērestībā.

9. Regulāra piecstūra katrā virsotnē ierakstīts reāls skaitlis. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divas blakus esošas piecstūra virsotnes un aizstāt katru no skaitļiem, kas tajās ierakstīti, ar to vidējo aritmētisko. Šādus gājienus var izdarīt atkārtoti. Vai no jebkuras sākuma situācijas, kurā visu piecu skaitļu summa ir 0, ir iespējams iegūt situāciju, kurā visi pieci skaitļi ir 0?

10. Tabulā, kas sastāv no 30×30 rūtiņām, ierakstīti 162 plusi un 144 mīnusi. Nevienā rindā un nevienā kolonnā nav vairāk kā 17 zīmes (katrā rūtiņā ir ne vairāk par vienu zīmi). Katram plusam izskaitām, cik mīnusu ir vienā rindiņā ar šo plusu. Katram mīnusam izskaitām, cik plusu ir vienā kolonnā ar šo mīnusu. Atrodiet visu šīs skaitīšanas rezultātā iegūto skaitļu summas maksimālo vērtību.

11. Trijstūra augstumu garumi ir 12, 15 un 20. Kāds ir šī trijstūra laukums?

12. Trijstūrī ABC B_1 un C_1 ir attiecīgi malu AB un AC viduspunkti. Ap trijstūriem ABC_1 un AB_1C apvilktās riņķa līnijas krustojas bez punkta A vēl arī punktā P. Taisne AP krusto ap trijstūri AB_1C_1 apvilkto riņķa līniju bez punkta A vēl arī punktā P_1. Pierādiet, ka $2AP = 3AP_1$.

13. Trijstūrī ABC punkti D un E atrodas attiecīgi uz malām AB un AC. Taisnes BE un CD krustojas punktā F. Pierādiet: ja

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA,$$

tad punkti A, D, F, E pieder vienai riņķa līnijai.

14. Uz sfēras virsmas atzīmēti 2006 punkti. Pierādiet, ka sfēras virsmu var sagriezt 2006 vienādos gabalos tā, ka katra gabala iekšpusē atrodas tieši viens no atzīmētajiem punktiem.

15. Trijstūra ABC mediānas krustojas punktā M. Taisne t iet caur punktu M un krusto ap ABC apvilkto riņķa līniju punktos X un Y tā, ka A un C atrodas vienā pusē no t. Pierādiet, ka $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

16. Vai eksistē 4 dažādi naturāli skaitļi ar īpašību: katru divu skaitļu reizinājumam pieskaitot 2006, iegūst vesela skaitļa kvadrātu?

17. Noskaidrojiet, kuriem naturāliem skaitļiem n skaitlis $3^n + 1$ dalās ar n^2.

18. Katram naturālam skaitlim n ar a_n apzīmēsim $n^{(n^n)}$ pēdējo ciparu. Pierādiet, ka virkne (a_n) ir periodiska, un noskaidrojiet tās minimālā perioda garumu.

19. Vai eksistē naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ar īpašību: katram naturālam n katru n pēc kārtas ņemtu virknes elementu summa dalās ar n^2?

20. 12-ciparu naturāls skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 1, 5 un 9, dalās ar 37. Pierādiet, ka šī skaitļa ciparu summa nav 76.

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas. Par katru uzdevumu var iegūt augstākais 5 punktus.