Baltic Way 2006

Turku, 3. november 2006

Version: Norwegian

1. En følge av reelle tall $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tilfredsstiller

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Hva er største mulige antall positive påfølgende elementer i følgen?

2. Anta at de reelle tallene $a_i \in [-2, 17]$ $(i = 1, 2, \ldots, 59)$ tilfredsstiller $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$. Vis at

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Vis at det for ethvert polynom $P(x)$ med reelle koeffisienter finnes et positivt heltall m og polynomer $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ med reelle koeffisienter slik at

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

4. La a, b, c, d, e, f være ikkenegative reelle tall som tilfredsstiller $a + b + c + d + e + f = 6$. Finn den største mulige verdien til

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

og bestem alle 6-tupler (a, b, c, d, e, f) for hvilke denne maksimumsverdien nås.

5. En til tider upålitelig professors siste bok omhandler en spesiell binær operasjon $*$. Når denne operasjonen anvendes på to heltall, blir resultatet igjen et heltall.

Vi vet at operasjonen oppfyller følgende to aksiomer:

a) $x * (x * y) = y$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Professoren hevder i sin bok at:

1. Operasjonen $*$ er kommutativ: $x * y = y * x$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Operasjonen $*$ er assosiativ: $(x * y) * z = x * (y * z)$ for alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Hvilke av disse påstandene følger fra de to aksiomene?

6. Bestem det største mulige antall elementer i et sett av positive heltall som oppfyller følgende krav:

1. Heltallene består kun av siffre fra mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Intet siffer opptrer mer enn én gang i hvert tall.
3. Siffrene i hvert av tallene kommer i stigende rekkefølge.
4. Ethvert par av tall har minst ett siffer til felles (muligens i forskjellige posisjoner).
5. Intet siffer dukker opp i alle tallene.

7. En fotograf tok bilder på en fest med 10 deltagere. For hvert av de 45 mulige parene finnes det nøyaktig ett bilde der begge er med, og på hvert av bildene er det enten to eller tre personer. Hva er det minste mulige antallet bilder som ble tatt?

8. Direktøren har funnet ut at de ansatte har formet seks konspirasjoner på avdelingen hans, med nøyaktig tre personer involvert i hver konspirasjon. Vis at direktøren kan splitte avdelingen i to laboratorier slik at ingen av konspirasjonene har alle sine involverte i samme laboratorium.

9. Til ethvert hjørne i en regulær femkant tilegnes et reelt tall. Det er tillatt å utføre følgende operasjon gjentatte ganger: Vi velger to nabohjørner, og erstatter begge de tilegnede tallene med deres gjennomsnitt. Er det alltid mulig å oppnå at alle tallene blir lik null, gitt at summen til de fem tilegnede tallene opprinnelig var lik null?

10. 162 plusstegn og 144 minustegn er plassert på et 30×30 brett slik at hver rad og hver kolonne inneholder høyst 17 tegn (intet felt inneholder mer enn ett tegn). For hvert plusstegn teller vi antall minustegn i samme rad, og for hvert minustegn teller vi antall plusstegn i samme kolonne. Finn den maksimale verdien til summen av disse tallene.

11. Høydene i en trekant er 12, 15, og 20. Hva er trekantens areal?

12. La ABC være en trekant, B_1 være midtpunktet til siden AB og C_1 midpunktet til siden AC. La videre P være det andre skjæringspunktet mellom ABC_1's og AB_1C's omskrevne sirkler, samt P_1 være det andre skjæringspunktet mellom linjen AP og AB_1C_1's omskrevne sirkel. Vis at $2AP = 3AP_1$.

13. I trekanten ABC ligger punktene D og E henholdsvis på sidene AB og AC. Linjene BE og CD skjærer hverandre i F. Vis at dersom

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA,$$

må punktene A, D, F og E ligge på en sirkel.

14. 2006 punkter er markert på overflaten til en sfære. Vis at overflaten kan kuttes i 2006 kongruente deler slik at hver del inneholder nøyaktig ett av punktene.

15. Medianene til trekanten ABC møtes i punktet M. En linje t gjennom M skjærer ABC's omsirkel i X og Y slik at A og C ligger på samme side av t. Vis at $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

16. Finnes det 4 forskjellige positive heltall slik at ethvert produkt av to av dem øket med 2006 gir et kvadrattall?

17. Bestem alle positive heltall n slik at $3^n + 1$ blir delelig med n^2.

18. For ethvert positivt heltall n la a_n betegne siste siffer i $n^{(n^n)}$. Vis at følgen (a_n) er periodisk, og bestem lengden til den minimale perioden.

19. Finnes det en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av positive heltall slik at det for ethvert positivt heltall n holder at alle summer av n påfølgende elementer er delelige med n^2?

20. Et 12-siffret positivt heltall bestående utelukkende av siffrene 1, 5 og 9 er delelig med 37. Vis at summen av dens siffre ikke kan være 76.

Tid til disposisjon: 4 og en halv time. 5 poeng per oppgave.