Varighed: 4.5 timer. Spørgsmål kan stilles de første 30 minutter.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

1. Bestem alle par af primtal (p, q), sådan at

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Bekræft eller afkræft følgende hypoteser:

a) For alle $k \geq 2$ vil enhver følge af k på hinanden følgende positive heltal indeholde et tal, der ikke er deleligt med noget primtal strengt mindre end k.

b) For alle $k \geq 2$ vil enhver følge af k på hinanden følgende positive heltal indeholde et tal, der er indbyrdes primisk med alle de andre tal i følgen.

3. For hvilke hele tal $n = 1, \ldots, 6$ har ligningen

$$a^n + b^n = c^n + n$$

mindst en heltallig løsning?

4. Lad n være et positivt helt tal og lad a, b, c, d være heltal, sådan at $n \mid a+b+c+d$ og $n \mid a^2+b^2+c^2+d^2$. Vis at

$$n \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd.$$

5. Lad $p > 3$ være et primtal, sådan at $p \equiv 3 \pmod 4$. Givet et positivt helt tal a_0 defineres en følge $a_0, a_1, \ldots$ af heltal ved $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ for alle $n = 1, 2, \ldots$. Vis at det er muligt at vælge a_0 på en sådan måde, at delfølgen $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ ikke er konstant modulo p for noget positivt helt tal N.

6. Mængden $1, 2, \ldots, 10$ deles op i tre delmængder A, B, C. For hver delmængde beregnes summen af elementerne, produktet af elementerne og summen af cifrene i elementerne.

Er det muligt, at A har den strengt største sum af elementer, B har det strengt største produkt af elementer og at C har den strengt største sum af cifre.

7. Bestem alle positive hele tal n, så uligheden

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

gælder for alle reelle tal x.

8. Bestem alle reelle tal a, for hvilke der findes en ikke-konstant funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som opfylder følgende to ligninger for alle $x \in \mathbb{R}$:

i) $\quad f(ax) = a^2 f(x) \quad$ og

ii) $\quad f(f(x)) = a\, f(x).$

9. Find alle firtupler (a, b, c, d) bestående af reelle tal, hvor alle de følgende ligninger er opfyldt:

$$\begin{cases} a^3 & + & c^3 & = & 2 \\ a^2b & + & c^2d & = & 0 \\ b^3 & + & d^3 & = & 1 \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6. \end{cases}$$

10. Lad $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $\dots$, $a_{0,2016}$ være positive reelle tal. For $n \geq 0$ og $1 \leq k < 2016$ sættes

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{og} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Vis at $\max\limits_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Mængden A består af 2016 positive hele tal. Alle primdivisorer i elementerne i A er mindre end 30. Bevis at der er fire forskellige tal a, b, c og d i A, sådan at $abcd$ er et kvadrattal.

12. Findes der en (ikke nødvendigvis konveks) sekskant med sidelængder $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (ikke nødvendigvis i den rækkefølge), som kan inddeles i a) 31 b) 32 ligesidede trekanter med sidelængde 1?

13. Der står n tal på en tavle. Til at begynde med er alle tallene 1. Et træk består af at erstatte to tal med to kopier af deres sum. Efter h træk viser det sig, at alle tallene på tavlen er lig m. Vis at $h \leq \frac{1}{2} n \cdot \log_2(m)$.

14. En terning består af 4^3 enhedsterninger, som hver indeholder et helt tal. I hver tur vælger du en terning og lægger 1 til alle tallene i de naboterninger, der har en flade til fælles med den valgte terning. Er det for alle valg af de oprindelige tal muligt at nå til en situation, hvor alle de 4^3 tal er delelige med 3?

15. Der ligger 2016 havne ud til Østersøen. Der er færgeruter (tovejs) mellem nogle af dem. Det er umuligt at lave en følge af direkte rejser $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$, hvor alle havnene $C_1, \dots, C_{1062}$ er forskellige. Vis at der findes to disjunkte mængder A og B, der hver består af 477 havne, så ingen havn i A har en direkte færgerute til en havn i B.

16. I trekant ABC er punkterne D og E skæringen mellem henholdsvis vinkelhalveringslinjen fra C og siden AB og vinkelhalveringslinjen fra B og siden AC. Punkterne F og G på henholdsvis forlængelsen af AB forbi B og AC forbi C, opfylder, at $BF = CG = BC$. Vis at $FG \parallel DE$.

17. Lad $ABCD$ være en konveks firkant med $AB = AD$. Lad T være et punkt på diagonalen AC så $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Vis at $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Lad $ABCD$ være et parallelogram med $\angle BAD = 60°$. Lad K og L være midtpunkterne af henholdsvis BC og CD. Bestem $\angle ABD$ under antagelse at, at $ABKL$ er indskrivelig.

19. Vi ser på trekanter i planen, hvis hjørner har heltallige koordinater. En sådan trekant kan *lovligt transformeres* ved at flytte et af trekantens hjørner parallelt med den modstående side til et nyt punkt med heltallige koordinater. Vis, at hvis to trekanter med heltallige koordinater har samme areal, så findes der en sekvens af lovlige transformationer, der transformerer den ene over i den anden.

20. Lad $ABCD$ være en indskrivelig firkant, hvor AB og CD ikke er parallelle. Lad M være midtpunktet af CD. Lad P være et punkt i det indre af $ABCD$, som opfylder, at $PA = PB = CM$. Vis at AB, CD og midtnormalen for MP går gennem samme punkt.