Baltic Way 2016
5 November 2016, Oulu, Finland
Version: Estonian

Lahendamisaeg: $4\frac{1}{2}$ tundi. Küsimusi võib küsida esimese 30 minuti jooksul.
Kasutada võib ainult joonestus- ja kirjutusvahendeid.

1. Leia kõik algarvude paarid (p, q), mis rahuldavad võrdust

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Tõesta või lükka ümber järgnevad hüpoteesid.

a) Iga $k \geq 2$ korral sisaldavad kõik k järjestikust arvust koosnevad positiivsete täisarvude järjendid arvu, mis ei jagu ühegi arvust k väiksema algarvuga.

b) Iga $k \geq 2$ korral sisaldavad kõik k järjestikust arvust koosnevad positiivsete täisarvude järjendid arvu, mis on ühistegurita kõigi teiste järjendi liikmetega.

3. Milliste täisarvude $n = 1, \ldots, 6$ korral leidub võrrandil

$$a^n + b^n = c^n + n$$

täisarvulisi lahendeid?

4. Olgu n positiivne täisarv ja olgu a, b, c, d sellised täisarvud, et $n \mid a+b+c+d$ ja $n \mid a^2+b^2+c^2+d^2$. Näita, et

$$n \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd.$$

5. Olgu $p > 3$ selline algarv, et $p \equiv 3 \pmod 4$. Positiivse täisarvu a_0 korral defineeritakse täisarvude jada $a_0, a_1, \ldots$ nii, et $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Tõesta, et on võimalik valida a_0 selliselt, et ühegi positiivse täisarvu N korral ei ole alamjada $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ konstantne mooduli p järgi.

6. Hulk $\{1, 2, \ldots, 10\}$ on jagatud kolmeks alamhulgaks A, B ja C. Iga alamhulga jaoks leitakse tema elementide summa, elementide korrutis ning tema kõigi elementide numbrite summa.

Kas on võimalik, et alamhulgal A on teistest suurem elementide summa, alamhulgal B teistest suurem elementide korrutis ning alamhulgal C teistest suurem numbrite summa?

7. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral võrratus

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

kehtib kõigi reaalarvude x jaoks.

8. Leia kõik reaalarvud a, mille jaoks leidub mittekonstantne funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis kõigi $x \in \mathbb{R}$ korral rahuldab kahte järgmist võrrandit:

i) $\quad f(ax) = a^2 f(x) \quad$ ja

ii) $\quad f(f(x)) = a\, f(x)$.

9. Leia kõik reaalarvude nelikud (a, b, c, d), mis rahuldavad korraga järgmisi võrrandeid:

$$\begin{cases} a^3 & + & c^3 & = & 2 \\ a^2b & + & c^2d & = & 0 \\ b^3 & + & d^3 & = & 1 \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6. \end{cases}$$

10. Olgu $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $\ldots$, $a_{0,\,2016}$ positiivsed reaalarvud. Defineerime iga $n \geq 0$ ja iga $1 \leq k < 2016$ jaoks

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{ja} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Näita, et $\max\limits_{1\leq k\leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Hulk A koosneb 2016 erinevast positiivsest täisarvust. Nende arvude kõik algarvulised jagajad on väiksemad kui 30. Tõesta, et hulgas A leiduvad neli erinevat arvu a, b, c ja d, mille korrutis $abcd$ on mingi täisarvu ruut.

12. Kas leidub kuusnurk (mitte ilmtingimata kumer) külgede pikkustega 1, 2, 3, 4, 5, 6 mingis järjekorras, mida saab jagada *a)* 31 *b)* 32 võrdkülgseks kolmnurgaks küljepikkusega 1?

13. Tahvlile on kirjutatud n arvu 1. Ühe käiguga saab kaks arvu tahvlil asendada kahe arvuga, mis on kumbki võrdne nende summaga. Osutub, et peale h käiku on kõik tahvlil olevad n arvu võrdsed arvuga m. Tõesta, et $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. Kuup koosneb 4^3 ühikkuubist. Igasse ühikkuupi on kirjutatud täisarv. Igal käigul valitakse üks ühikkuup ning suurendatakse 1 võrra kõiki täisarve naaberkuupides, millega on valitud kuubil ühine tahk. Kas on võimalik saavutada olukord, kus kõik 4^3 täisarvu jaguvad 3-ga, sõltumata sellest, milline on algne olukord?

15. Läänemerel on 2016 sadamat. Mõned neist on ühendatud kahesuunaliste praamiliinidega. On teada, et ei leidu otsereiside järjendit $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$, kus sadamad $C_1, \ldots, C_{1062}$ on kõik erinevad. Tõesta, et leidub kaks sellist lõikumatut hulka A ja B, kummaski 477 sadamat, et hulgas A pole sadamat, millel oleks otseliin hulga B mingi sadamaga.

16. Kolmnurgas ABC on D ja E vastavalt tippudest C ja B tõmmatud nurgapoolitajate lõikepunktid külgedega AB ja AC. Külgede AB ja AC pikendustel üle punktide B ja C valitakse vastavalt punktid F ja G nii, et $|BF| = |CG| = |BC|$. Tõesta, et $FG \parallel DE$.

17. Olgu $ABCD$ selline kumer nelinurk, et $|AB| = |AD|$. Olgu T selline punkt diagonaalil AC, et $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Tõesta, et $|AT| + |AC| \geq |AB| + |AD|$.

18. Olgu $ABCD$ selline rööpkülik, et $\angle BAD = 60°$. Olgu K ja L vastavalt külgede BC ja CD keskpunktid. Eeldades, et $ABKL$ on kõõlnelinurk, leia $\angle ABD$.

19. Vaatleme tasandil kolmnurki, mille tipud on täisarvuliste koordinaatidega. *Legaalseks teisenduseks* nimetame sellise kolmnurga ühe tipu liigutamist teise täisarvuliste koordinaatidega punkti nii, et liikumine toimub paralleelselt vastasküljega. Näita, et kui kahel kolmnurgal on võrdne pindala, siis on võimalik legaalsete teisenduste abil teisendada üks kolmnurk teiseks.

20. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk, mille küljed AB ja CD ei ole paralleelsed. Olgu M lõigu CD keskpunkt. Olgu P selline punkt nelinurga $ABCD$ sees, et $|PA| = |PB| = |CM|$. Tõesta, et AB, CD ja lõigu MP keskristsirge lõikuvad samas punktis.