Baltic Way 2016
5. nóvember 2016, Oulu, Finnland
Version: Icelandic

Tímamörk: $4\frac{1}{2}$ klst. Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Einungis teikniáhöld og skriffæri eru leyfileg.

1. Finnið allar tvenndir frumtalna (p, q) þannig að

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Sannið eða afsannið eftirfarandi fullyrðingar:

a) Sérhver runa af $k \geq 2$ jákvæðum samliggjandi heiltölum inniheldur tölu sem ekki er deilanleg með frumtölu minni en k.

b) Sérhver runa af $k \geq 2$ jákvæðum samliggjandi heiltölum inniheldur tölu sem er ósamþátta öllum hinum tölum í rununni.

3. Fyrir hverjar af heiltölunum $n = 1, \ldots, 6$ er til heiltölulausn á jöfnunni

$$a^n + b^n = c^n + n?$$

4. Látum n vera jákvæða heiltölu og látum a, b, c, d vera heiltölur þannig að $n \mid a+b+c+d$ og $n \mid a^2+b^2+c^2+d^2$. Sýnið að

$$n \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd.$$

5. Látum $p > 3$ vera frumtölu þannig að $p \equiv 3 \pmod 4$. Fyrir gefna jákvæð heiltölu a_0 skilgreinum við heiltölurununa $a_0, a_1, \ldots$ með $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ fyrir öll $n = 1, 2, \ldots$. Sannið að hægt er að velja a_0 þannig að hlutrunan $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ er ekki föst módúlus p fyrir neina jákvæða heiltölu N.

6. Menginu $\{1, 2, \ldots, 10\}$ er skipt upp í þrjú hlutmengi A, B og C. Fyrir sérhvert hlutmengi er summa stakanna, margfeldi stakanna og summa tölustafa stakanna reiknuð.

Getur A verið eina mengið með stærstu summu staka, B verið eina mengið með stærsta margfeldi staka og C verið eina mengið með stærstu summu tölustafa staka?

7. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

gildi fyrir allar rauntölur x.

8. Finnið allar rauntölur a þannig að til sé fall $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem ekki er fast og eftirfarandi jöfnur gildi fyrir öll $x \in \mathbb{R}$:

i) $f(ax) = a^2 f(x)$ og

ii) $f(f(x)) = a\, f(x)$.

9. Finnið allar ferndir rauntalna (a, b, c, d) sem fullnægja öllum jöfnunum:

$$\begin{cases} a^3 & + & c^3 & = & 2 \\ a^2b & + & c^2d & = & 0 \\ b^3 & + & d^3 & = & 1 \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6. \end{cases}$$

10. Látum $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, …, $a_{0,2016}$ vera jákvæðar rauntölur. Fyrir $n \geq 0$ og $1 \leq k < 2016$ látum við

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{og} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Sýnið að $\max\limits_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Mengi A samanstendur af 2016 jákvæðum heiltölum. Allir frumþættir þeirra eru minni en 30. Sannið að til séu fjórar ólíkar tölur a, b, c og d úr A þannig að $abcd$ sé ferningstala.

12. Er til sexhyrningur (ekki nauðsynlega úthyrndur) með hliðarlengdir 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ekki nauðsynlega í þessari röð) sem hægt er að skipta upp í a) 31 b) 32 jafnhliða þríhyrninga af hliðarlengd 1?

13. Á töflu hefur talan 1 verið skrifuð n sinnum. Í hverju skrefi er tveimur tölum skipt út fyrir tvö eintökum af summu þeirra. Svo vill til að eftir h skref eru allar n tölurnar á töflunni jafnar m. Sannið að $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. Teningur er samsettur úr 4^3 einingateningum sem hver og einn inniheldur heiltölu. Í hverju skrefi er valinn einingateningur og í nágrannateningum hans sem deila hlið með honum er heiltala þeirra hækkuð um 1. Er hægt að komast í stöðu þannig að allar 4^3 heiltölurnar séu deilanlegar með 3, sama hver upphafsstaðan er?

15. Við Eystrasaltið eru 2016 hafnir. Á milli sumra þeirra gengur ferja í báðar áttir. Ekki er til runa af beinum ferjuleiðum $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$ þar sem hafnirnar $C_1, \ldots, C_{1062}$ eru allar ólíkar. Sannið að til séu tvö sundurlæg mengi A og B sem hvort um sig hefur 477 hafnir þannig að frá engri höfn í A gengur ferja til hafnar í B.

16. Í þríhyrningi ABC eru punktarnir D og E skurðpunktar helmingalína hornanna C og B við hliðarnar AB og AC. Punktar F og G eru á framlengingum AB og AC handan B og C þannig að $BF = CG = BC$. Sannið að $FG \parallel DE$.

17. Látum $ABCD$ vera úthyrndan ferhyrning með $AB = AD$. Látum T vera punkt á hornalínunni AC þannig að $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Sannið að $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Látum $ABCD$ vera samsíðung þannig að $\angle BAD = 60°$. Látum K og L vera miðpunkta BC og CD. Gerum ráð fyrir að $ABKL$ sé rásaður ferhyrningur. Finnið stærð $\angle ABD$.

19. Skoðum þríhyrninga í sléttunni þar sem hver hornpunktur hefur heiltöluhnit. Slíkum þríhyrning má *umbreyta leyfilega* með því að færa einn hornpunkt hans samsíða gagnstæðri hlið í annan punkt með heiltöluhnit. Sýnið að ef tveir slíkir þríhyrningar hafi sama flatarmál þá sé hægt að umbreyta öðrum þeirra í hinn með runu af leyfilegum umbreytingum.

20. Látum $ABCD$ vera rásaðan ferhyrning þannig að AB og CD séu ekki samsíða. Látum M vera vera miðpunkt CD. Látum P vera innripunkt $ABCD$ þannig að $PA = PB = CM$. Sannið að AB, CD og miðþverill MP skerist allar í sama punkti.