Laikas sprendimui: 4 val. 30 min. Klausimus galima užduoti per pirmąsias 30 minučių.
Leidžiama naudotis tik rašymo ir braižymo priemonėmis.

1. Raskite visas tokias pirminių skaičių poras (p, q), kad

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Įrodykite arba paneikite šias hipotezes.

a) Bet kuriam sveikajam skaičiui $k \geq 2$ bet kurioje iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekoje iš k narių egzistuoja narys, neturintis pirminių daliklių, mažesnių už k.

b) Bet kuriam sveikajam skaičiui $k \geq 2$ bet kurioje iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekoje iš k narių egzistuoja narys, tarpusavyje pirminis su kiekvienu kitu sekos nariu.

3. Kurioms iš natūraliųjų reikšmių $n = 1, \ldots, 6$ lygtis

$$a^n + b^n = c^n + n$$

turi sveikąjį sprendinį (a, b, c) ?

4. Natūralusis skaičius n ir sveikieji skaičiai a, b, c, d tenkina sąlygas $n \mid a+b+c+d$ ir $n \mid a^2+b^2+c^2+d^2$. Įrodykite, kad

$$n \mid a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd.$$

5. Duotas pirminis skaičius $p > 3$, kuriam $p \equiv 3 \pmod 4$. Pasirinkus natūralųjį skaičių a_0, natūraliųjų skaičių seka $a_0, a_1, \ldots$ apibrėžiama taip: $a_n = a_{n-1}^{2^n}$, kai $n = 1, 2, \ldots$. Įrodykite: a_0 galima pasirinkti taip, kad kiekvienam natūraliajam N posekyje $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ moduliu p būtų skirtingų liekanų.

6. Aibė $\{1, 2, \ldots, 10\}$ padalyta į tris netuščius nesikertančius poaibius A, B ir C. Kiekvienam poaibiui suskaičiuota jo elementų suma, jo elementų sandauga ir jo elementų visų skaitmenų suma.

Ar gali būti, kad A elementų suma yra griežtai didesnė už kitas dvi sumas, B elementų sandauga yra griežtai didesnė už kitas dvi sandaugas, o C elementų skaitmenų suma yra griežtai didesnė už kitas dvi skaitmenų sumas?

7. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius n, kuriems nelygybė

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

galioja su visais realiaisiais skaičiais x.

8. Raskite visus tokius realiuosius skaičius a, kuriems egzistuoja funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nelygi konstantai ir su visais $x \in \mathbb{R}$ tenkinanti dvi lygybes:

i) $f(ax) = a^2 f(x)$ ir

ii) $f(f(x)) = a\, f(x)$.

9. Raskite visus realiųjų skaičių ketvertus (a,b,c,d), tenkinančius lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a^3 & + & c^3 & = & 2, \\ a^2b & + & c^2d & = & 0, \\ b^3 & + & d^3 & = & 1, \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6. \end{cases}$$

10. Duoti realieji teigiami skaičiai $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $\ldots$, $a_{0,\,2016}$. Natūraliesiems skaičiams $n \geq 0$ ir $1 \leq k < 2016$ apibrėžkime

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{bei} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Įrodykite, kad $\max\limits_{1\leq k\leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Aibę A sudaro 2016 natūraliųjų skaičių. Visi jų pirminiai dalikliai mažesni už 30. Įrodykite, kad aibėje A yra keturi skirtingi skaičiai a, b, c ir d, kurių sandauga $abcd$ yra tikslusis kvadratas.

12. Ar egzistuoja šešiakampis (nebūtinai iškilasis), kurio kraštinių ilgiai yra 1, 2, 3, 4, 5, 6 (nebūtinai tokia tvarka) ir kurį galima be persidengimų sudaryti iš a) 31 b) 32 lygiakraščių trikampėlių, kurių kraštinės ilgis yra 1 ?

13. Lentoje parašyta n skaičių, lygių 1. Ėjimo metu reikia nutrinti du skaičius ir du kartus parašyti jų sumą. Po h ėjimų visi n skaičių tapo lygūs m. Įrodykite, kad $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. Kubą sudaro 4^3 vienetinių kubelių, kurių kiekviename įrašyta po sveikąjį skaičių. Ėjimo metu reikia pasirinkti kubelį ir kiekviename bendrą sieną su juo turinčiame gretimame kubelyje skaičių padidinti vienetu. Ar su bet kokia pradine situacija galima pasiekti, kad visi 4^3 skaičių dalytųsi iš 3 ?

15. Superbaltijos jūroje yra 2016 uostų. Tarp kai kurių iš jų kursuoja keltai (visada į abi puses). Nėra tokios kelionių iš uosto į uostą sekos $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$, kurioje visi uostai $C_1, \ldots, C_{1062}$ būtų skirtingi. Įrodykite: egzistuoja tokios dvi nesikertančios aibės A ir B po 477 uostus, kad iš jokio A uosto neįmanoma nukeliauti į B uostą be tarpinių sustojimų.

16. Trikampio ABC pusiaukampinės iš C ir B kerta priešais esančias kraštines AB ir AC atitinkamai taškuose D ir E. Tiesėje AB pažymėtas toks taškas F, kad B yra tarp A ir F. Tiesėje AC pažymėtas toks taškas G, kad C yra tarp A ir G. Galioja lygybės $BF = CG = BC$. Įrodykite, kad $FG \parallel DE$.

17. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės tenkina lygybę $AB = AD$. Įstrižainėje AC pažymėtas toks taškas T, kad $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Įrodykite, kad $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Duotas lygiagretainis $ABCD$ su kampu $\angle BAD = 60^\circ$. Kraštinių BC ir CD vidurio taškai atitinkamai pažymėti K ir L. Keturkampis $ABKL$ įbrėžtinis. Raskite $\angle ABD$.

19. Nagrinėkime tik tuos plokštumos trikampius, kurių visų viršūnių koordinatės yra sveikieji skaičiai. Toks trikampis *teisėtai transformuojamas*, vieną viršūnę pastūmus lygiagrečiai priešais esančiai kraštinei į tašką su sveikosiomis koordinatėmis. Įrodykite, kad turint du lygiapločius trikampius, vieną iš kito galima gauti, atlikus kelias tokias transformacijas.

20. Įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD nelygiagrečios. Pažymėti CD vidurio taškas M ir toks $ABCD$ vidaus taškas P, kad $PA = PB = CM$. Įrodykite, kad tiesės AB, CD ir atkarpos MP vidurio statmuo kertasi viename taške.