Baltijas ceļš 2016
2016. gada 5. novembris, Oulu, Somija
Version: Latvian

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

1. Atrast visus pirmskaitļu pārus (p, q), kuriem

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Pierādīt vai atspēkot sekojošus apgalvojumus.

a) Visiem $k \geq 2$, jebkura k pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu virkne satur skaitli, kas nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas ir mazāks par k.

b) Visiem $k \geq 2$, jebkura k pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu virkne satur skaitli, kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem pārējiem šīs virknes locekļiem.

3. Kuriem naturāliem $n = 1, \ldots, 6$ vienādojumam

$$a^n + b^n = c^n + n$$

eksistē atrisinājums veselos skaitļos?

4. Dots naturāls skaitlis n un tādi veseli skaitļi a, b, c, d, ka gan $a+b+c+d$, gan $a^2+b^2+c^2+d^2$ dalās ar n. Pierādīt, ka arī $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd$ dalās ar n.

5. Dots pirmskaitlis $p > 3$, kuram $p \equiv 3 \pmod 4$. Dotam naturālam skaitlim a_0 virkni $a_0, a_1, \ldots$ definē kā $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ visiem $n = 1, 2, \ldots$. Pierādīt, ka a_0 var izvēlēties tā, ka apakšvirkne $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ nav konstanta pēc moduļa p nevienam naturālam N.

6. Kopa $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ir sadalīta trīs nešķeļošās apakškopās A, B un C. Katrai no šīm apakškopām aprēķināja tās elementu summu, elementu reizinājumu un tās elementu ciparu summu.

Vai var gadīties, ka A elementu summa bija lielāka nekā pārējām apakškopām, B elementu reizinājums bija lielāks nekā pārējām apakškopām un C elementu ciparu summa bija lielāka nekā pārējām apakškopām?

7. Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem visiem reāliem x izpildās nevienādība

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2.$$

8. Atrast visus reālos skaitļus a, kuriem var atrast funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas nav konstanta un visiem reāliem x apmierina sekojošus nosacījumus:

i) $f(ax) = a^2 f(x)$ un

ii) $f(f(x)) = a\, f(x)$.

9. Atrast visus reālu skaitļu četriniekus (a, b, c, d), kas apmierina sekojošu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a^3 & + & c^3 & = & 2 \\ a^2b & + & c^2d & = & 0 \\ b^3 & + & d^3 & = & 1 \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6. \end{cases}$$

10. Doti reāli pozitīvi skaitļi $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $\ldots$, $a_{0,2016}$. Katram $n \geq 0$ un $1 \leq k < 2016$ definēsim

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{un} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Pierādīt, ka $\max\limits_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Kopa A sastāv no 2016 dažādiem skaitļiem, visi šo skaitļu pirmreizinātāji ir mazāki par 30. Pierādīt,s ka kopā A var atrast tādus 4 dažādus skaitļus a, b, c un d, ka $abcd$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

12. Vai eksistē sešstūris (ne obligāti izliekts) ar malu gariem 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ne obligāti šādā secībā), kuru var sagriezt a) 31 b) 32 vienādmalu trijstūros ar malas garumu 1?

13. Uz tāfeles uzrakstīti n skaitļi 1. Vienā gājienā atļauts nodzēst no tāfeles divus skaitļus un divas reizes uzrakstīt tikko nodzēsto skaitļu summu. Pēc h gājieniem visi n skaitļi izrādījās vienādi ar m. Pierādīt, ka $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. Kubs sastāv no 4^3 vienības kubiņiem, katrā no tiem ierakstīts vesels skaitlis. Vienā gājienā atļauts izvēlēties vienu kubiņu un visus tā kaimiņu kubiņos ierakstītos skaitļus palielināt par 1. Vai neatkarīgi no sākumā ierakstītajiem skaitļiem vienmēr ir iespējams sasniegt situāciju, kurā visi 4^3 skaitļi dalās ar 3?

15. Baltijas jūrā ir 2016 ostas, dažas no tām savieno tiešā divvirzienu prāmju satiksme. Ir zināms, ka nav tādas tiešo reisu virknes $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$, kurā visas ostas $C_1, \ldots, C_{1062}$ būtu dažādas. Pierādīt, ka eksistē divas nešķeļošās ostu apakškopas A un B, kurās katrā ir tieši 477 ostas un neviena osta no apakškopas A nav savienota ar ostu no apakškopas B ar tiešo prāmju satiksmi.

16. Trijstūrī ABC novilktas bisektrises BE un CD. Uz malu AB un AC pagarinājumiem atlikti punkti F un G tā, ka B atrodas starp A un F, C atrodas starp A un G un $BF = CG = BC$. Pierādīt, ka $FG \parallel DE$.

17. Izliektā četrstūrī $ABCD$, kurā $AB = AD$, uz diagonāles AC atlikts punkts T tā, ka $\sphericalangle ABT + \sphericalangle ADT = \sphericalangle BCD$. Pierādīt, ka $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Dots paralelograms $ABCD$, kurā $\sphericalangle BAD = 60°$, tā malu BC un CD viduspunkti ir, attiecīgi, K un L. Zināms, ka četrstūrim $ABKL$ var apvilkt riņķa līniju. Aprēķināt $\sphericalangle ABD$.

19. Aplūkosim plaknes trijstūrus, kuriem visu virsotņu koordinātas ir veseli skaitļi. Par *legālu transformāciju* sauksim šāda trijstūra vienas virsotnes pārvietošanu paralēli pretējai malai uz citu punktu ar veselām koordinātām. Pierādīt, ka jebkurus divus šādus trijstūrus, kuru laukumi ir vienādi, var pārveidot vienu par otru ar legālu transformāciju virkni.

20. Ap četrstūri $ABCD$, kuram malas AB u CD nav paralēlas, apvilkta riņķa līnija, malas CD viduspunkts ir M. Četrstūra $ABCD$ iekšienē atlikts punkts P tā, ka $PA = PB = CM$. Pierādīt, ka taisnes AB, CD un nogriežņa MP vidusperpendikuls krustojas vienā punktā.