Czas pracy: $4\frac{1}{2}$ godziny. Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

1. Znaleźć wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) spełniających równanie

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Rozstrzygnąć następujące hipotezy:

a) Dla każdego $k \geq 2$, każdy ciąg k kolejnych dodatnich liczb całkowitych zawiera liczbę, która nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą mniejszą od k.

b) Dla każdego $k \geq 2$, każdy ciąg k kolejnych dodatnich liczb całkowitych zawiera liczbę, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb z tego ciągu.

3. Dla jakich $n = 1, 2, \ldots, 6$ równanie

$$a^n + b^n = c^n + n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?

4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi, że $n \mid a+b+c+d$ oraz $n \mid a^2+b^2+c^2+d^2$. Udowodnić, że

$$n \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd.$$

5. Niech $p > 3$ będzie taką liczbą pierwszą, że $p \equiv 3 \pmod 4$. Dla liczby całkowitej dodatniej a_0 definiujemy ciąg liczb całkowitych $a_0, a_1, \ldots$ wzorem $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że można wybrać a_0 w taki sposób, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej N podciąg $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ nie jest stały modulo p.

6. Zbiór $\{1, 2, \ldots, 10\}$ podzielono na trzy rozłączne podzbiory A, B i C. Dla każdego z nich obliczamy sumę jego elementów, iloczyn jego elementów oraz sumę cyfr jego elementów.

Czy jest możliwe, że zbiór A jako jedyny ma największą sumę elementów, zbiór B jako jedyny ma największy iloczyn elementów, a zbiór C jako jedyny największą sumę cyfr elementów?

7. Znaleźć wszytkie liczby całkowite dodatnie n, dla których nierówność

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

8. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a, dla których istnieje niestała funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca następujące dwa warunki dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

i) $\quad f(ax) = a^2 f(x) \quad$ oraz

ii) $\quad f(f(x)) = a\, f(x)$.

9. Znaleźć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d), które jednocześnie spełniają następujące równania:

$$\begin{cases} a^3 + c^3 = 2 \\ a^2b + c^2d = 0 \\ b^3 + d^3 = 1 \\ ab^2 + cd^2 = -6. \end{cases}$$

10. Niech $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $\ldots$, $a_{0,\,2016}$ będą liczbami dodatnimi. Niech dla $n \geq 0$ oraz $1 \leq k < 2016$

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{oraz} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Wykazać, że $\max\limits_{1\leq k\leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Zbiór A składa się z 2016 liczb całkowitych dodatnich, których wszystkie dzielniki pierwsze są mniejsze od 30. Wykazać, że w zbiorze A istnieją cztery różne liczby a, b, c i d takie, że $abcd$ jest kwadratem liczby całkowitej.

12. Czy istnieje sześciokąt (niekoniecznie wypukły), którego boki mają długości 1, 2, 3, 4, 5, 6 (niekoniecznie w tej kolejności), który może być podzielony na a) 31 b) 32 trójkąty równoboczne o boku długości 1?

13. Na tablicy napisano n jedynek. Ruch polega na wybraniu dwóch liczb napisanych na tablicy i zastąpieniu każdej z nich ich sumą. Okazało się, że po wykonaniu pewnych h ruchów każda z n liczb na tablicy jest równa m. Udowodnić, że $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. Kostka składa się z 4^3 sześcianów jednostkowych, z których każdy zawiera liczbę całkowitą. Ruch polega na wybraniu sześcianu jednostkowego i powiększeniu o 1 liczb zawartych w sąsiadujących sześcianach mających z nim wspólną ścianę. Czy niezależnie od początkowych wartości liczb można uzyskać sytuację, w której wszystkie liczby są podzielne przez 3?

15. Morze Bałtyckie ma 2016 portów. Między niektórymi z nich obsługiwane są przeprawy promowe (w obu kierunkach). Nie istnieje ciąg bezpośrednich przepraw $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$, w którym wszystkie porty $C_1, \ldots, C_{1062}$ są różne. Udowodnić, że istnieją takie dwa rozłączne zbiory A i B, z których każdy zawiera 477 portów, że żaden port ze zbioru A nie ma bezpośredniego połączenia z żadnym portem ze zbioru B.

16. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku C z bokiem AB, a punkt E — punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku B z bokiem AC. Punkty F i G, leżące odpowiednio na przedłużeniach boków AB i AC za punktami B i C, spełniają równości $BF = CG = BC$. Udowodnić, że $FG \parallel DE$.

17. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB = AD$. Punkt T leży na przekątnej AC, przy czym $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Wykazać, że $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $\angle BAD = 60°$. Punkty K i L są środkami odpowiednio odcinków BC i CD. Wiedząc, że $ABKL$ można wpisać w okrąg, znaleźć $\angle ABD$.

19. Rozważamy trójkąty na płaszczyźnie, których każdy wierzchołek ma całkowite współrzędne. Taki trójkąt może być *legalnie przekształcony* poprzez przesunięcie jednego z wierzchołków do innego punktu o współrzędnych całkowitych równolegle do przeciwległego boku. Wykazać, że jeśli dwa trójkąty mają równe pola, to istnieje ciąg legalnych przekształceń przekształcający jeden z nich na drugi.

20. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Proste AB i CD nie są równoległe. M jest środkiem odcinka CD. P jest takim punktem leżącym wewnątrz $ABCD$, że $PA = PB = CM$. Wykazać, że proste AB, CD i symetralna odcinka MP przecinają się w jednym punkcie.