Baltic Way 2016
5 november 2016, Uleåborg, Finland
Version: Swedish

Skrivtid: $4\frac{1}{2}$ timmar. Frågor må ställas under den första halvtimmen.
Endast skrivdon tillåtna.

1. Sök alla primtal p och q, för vilka

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Bevisa eller motbevisa följande förmodanden.

(a) För varje $k \geq 2$ innehåller varje följd av k konsekutiva positiva heltal ett tal, som ej är delbart med något primtal mindre än k.

(b) För varje $k \geq 2$ innehåller varje följd av k konsekutiva positiva heltal ett tal, som är relativt prima med alla andra tal i följden.

3. För vilka heltal $n = 1, \ldots, 6$ har ekvationen

$$a^n + b^n = c^n + n$$

en lösning i heltal?

4. Låt n vara ett positivt heltal och a, b, c, d heltal, sådana att

$$n \mid a+b+c+d \qquad \text{och} \qquad n \mid a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Visa, att

$$n \mid a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd.$$

5. Låt $p > 3$ vara ett primtal sådant att $p \equiv 3 \pmod 4$. Givet ett positivt heltal a_0, definieras en följd $a_0, a_1, \ldots$ av heltal genom $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ för alla $n = 1, 2, \ldots$. Bevisa, att a_0 kan väljas så att delföljden $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ inte är konstant modulo p för något positivt heltal N.

6. Mängden $\{1, 2, \ldots, 10\}$ indelas i tre delmängder A, B och C. Summan, produkten och siffersumman av de ingående elementen beräknas för de tre mängderna. Är det möjligt, att A har den (strängt) största summan, B den största produkten och C den största siffersumman?

7. Sök alla positiva heltal n, för vilka följande olikhet gäller för alla reella tal x:

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2.$$

8. Finn alla reella tal a, för vilka någon icke-konstant funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan samtidigt uppfylla följande två ekvationer för varje $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\quad f(ax) = a^2 f(x) \quad$ och

(ii) $\quad f(f(x)) = a\, f(x)$.

9. Sök alla kvadrupler (a, b, c, d) av reella tal, som löser följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} a^3 & + & c^3 & = & 2 \\ a^2b & + & c^2d & = & 0 \\ b^3 & + & d^3 & = & 1 \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6. \end{cases}$$

10. Låt $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $\ldots$, $a_{0,\,2016}$ vara positiva reella tal. För $n \geq 0$ och $1 \leq k < 2016$, låt

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{och} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Visa, att $\max\limits_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Låt A vara en mängd av 2016 positiva heltal. Alla primfaktorer i dessa tal understiger 30. Bevisa existensen av fyra olika tal a, b, c och d i A, med egenskapen att $abcd$ är kvadratiskt.

12. Finns det en hexagon (ej nödvändigtvis konvex) med sidlängder 1, 2, 3, 4, 5, 6 (i någon ordning), vilken låter sig tesselleras (täckas utan överlappning) av (a) 31 eller (b) 32 liksidiga trianglar med sidlängd 1?

13. På en svart tavla står n ettor skrivna. Det är tillåtet, att ersätta två tal på tavlan med två kopior av deras summa. Detta förfarande upprepas. Efter h drag visar sig samtliga n tal på tavlan vara lika med m. Visa, att $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. En stor kub består av $4 \times 4 \times 4$ enhetskuber. Envar av dessa innehåller ett heltal. Du må nu välja en kub, varpå talen i de närliggande kuberna, vilka gränsar med en sidoyta till den valda kuben, ökas med 1. Detta förfarande upprepas. Är det möjligt, oavsett de ursprungliga talen, att åstadkomma en situation, där samtliga 4^3 tal är delbara med 3?

15. Östersjön har 2016 hamnstäder. Mellan somliga städer löper färjeförbindelser (i båda riktningarna). Det är omöjligt, att företa direkta färjeresor $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$, där samtliga städer $C_1, \ldots, C_{1062}$ är olika. Bevisa, att det existerar två disjunkta mängder A och B av städer, med 477 städer i vardera, där ingen direkt färjeförbindelse finns mellan en stad i A och en stad i B.

16. I triangeln ABC drages bisektriserna till vinklarna C och B. Dessa möter sidorna AB och AC i punkterna D respektive E. Punkterna F och G, bortom B och C på strålarna AB respektive AC, uppfyller $BF = CG = BC$. Bevisa, att $FG \parallel DE$.

17. Låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning vari $AB = AD$. Punkten T på diagonalen AC uppfyller $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Bevisa, att $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Låt $ABCD$ vara en parallellogram för vilken $\angle BAD = 60°$. Låt K och L beteckna mittpunkterna på BC respektive CD. Givet att fyrhörningen $ABKL$ kan inskrivas i en cirkel, finn $\angle ABD$.

19. Betrakta trianglar i planet, vilkas hörn har heltalskoordinater. En sådan triangel kan *lagligt transformeras* genom att förskjuta ett hörn parallellt med motstående sida till en ny punkt med heltalskoordinater. Visa, att om två trianglar har samma area, kan den ena fås att sammanfalla med den andra genom en sekvens av lagliga transformationer.

20. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning, vilken låter sig inskrivas i en cirkel, och för vilken AB och CD ej är parallella. Låt M beteckna mittpunkten på CD, och låt P vara en punkt inuti $ABCD$ av sådan beskaffenhet, att $PA = PB = CM$. Bevisa, att AB, CD och mittpunktsnormalen till MP löper genom samma punkt.