Finnish

BALTIAN TIE 2010

REYKJAVIK, 6. MARRASKUUTA 2010

Koeaika: $4\frac{1}{2}$ tuntia.
Kysymyksiä saa esittää ensimmäisen puolen tunnin aikana.
Kirjoitusvälineiden lisäksi vain harppi ja viivoitin ovat sallittuja.
Tehtävät ovat viiden pisteen arvoisia.

Tehtävä 1. Etsi kaikki reaalilukunelikköt (a, b, c, d), jotka toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d. \end{cases}$$

Tehtävä 2. Olkoon x reaaliluku, jolle $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Todista, että

$$\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \geq 1.$$

Tehtävä 3. Olkoot x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n \geq 2)$ ykköstä suurempia reaalilukuja. Oletetaan, että kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ pätee $|x_i - x_{i+1}| < 1$. Osoita, että

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

Tehtävä 4. Etsi kaikki sellaiset reaalikertoimiset polynomit $P(x)$, että kaikilla kokonaisluvuilla x pätee

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x).$$

Tehtävä 5. Merkitään $\mathbb{R}$:llä kaikkien reaalilukujen joukkoa. Etsi kaikki kuvaukset $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y),$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 6. $n \times n$-ruudukko on väritetty n värillä niin, että pääviistorivi (ylävasemmalta alaoikealle) on väritetty ensimmäisellä värillä, sen viereiset kaksi viistoriviä toisella värillä, seuraavat kaksi viistoriviä (yksi ylempi ja yksi alempi) kolmennella jne. Siis kulmista kaksi (yläoikea ja alavasen) väritetään n:nnellä värillä. Tiedetään, että on mahdollista sijoittaa laudalle n tornia niin, että ne eivät uhkaa toisiaan ja mitkään kaksi tornia eivät sijaitse samanvärisillä ruuduilla. Todista, että $n \equiv 0 \pmod 4$ tai $n \equiv 1 \pmod 4$.

Tehtävä 7. Maassa on muutama kaupunki, joista yksi on pääkaupunki. Minkä tahansa kahden kaupungin A ja B välillä on olemassa suora lento kaupungista A kaupunkiin B ja kaupungista B kaupunkiin A, lisäksi näillä on sama hinta. Oletetaan, että kaikki kiertomatkat, jotka laskeutuvat täsmälleen kerran kuhunkin kaupunkiin, maksavat yhtä paljon. Todista, että kaikki kiertomatkat, jotka jättävät pääkaupungin väliin ja käyvät täsmälleen kerran kaikissa muissa kaupungeissa, maksavat yhtä paljon.

Tehtävä 8. 30 jäsenen klubissa jokaisella jäsenellä on aluksi hattu. Eräänä päivänä kukin jäsen lähettää hattunsa jollekin toiselle jäsenelle (jäsenet saattavat vastaanottaa useamman kuin yhden hatun). Todista, että on olemassa sellainen 10 jäsenen ryhmä, että kukaan ryhmän jäsenistä ei ole saanut keltään toiselta ryhmän jäseneltä hattua.

Tehtävä 9. Kasassa on 1000 tulitikkua. Kaksi pelajaa ottaa kasasta vuorollaan yhdestä viiteen tulitikkua. Lisäksi on sallittua korkeintaan 10 vuorolla ottaa kasasta kuudeskin tikku, esimerkiksi ensimmäinen pelaaja voi tehdä 7 tällaista poikkeussiirtoa ja toinen pelaaja 3 poikkeussiirtoa, eikä sen jälkeen poikkeussiirtoja sallita. Viimeisen tulitikun ottava voittaa. Määritä, kummalla pelaajista on voittostrategia.

Tehtävä 10. Olkoon n kokonaisluku, jolle $n \geq 3$. Tarkastellaan kuperan n-kulmion kaikkia jakoja kolmioiksi $n-3$:lla toisiaan leikkaamattomalla lävistäjällä. Tarkastellaan edelleen näiden kolmioiden värityksiä mustiksi ja valkoisiksi niin, että kolmiot, joilla on yhteinen sivu, ovat erivärisiä. Määritä mustien kolmioiden pienin mehdollinen lukumäärä.

Tehtävä 11. Olkoon $ABCD$ neliö sekä S sen lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Ympyrä k kulkee pisteiden A ja C sekä ympyrä k' pisteiden B ja D kautta. Ympyrät k ja k' leikkaavat toisensa tasan kahdessa eri pisteessä P ja Q. Osoita, että S on PQ:lla.

Tehtävä 12. Olkoon $ABCD$ puolisuunnikas, joka ei ole suunnikas.

a) Osoita, että puolisuunnikkaan sivujen AB, BC, CD ja DA pituudet (tässä järjestyksessä) eivät muodosta aritmeettista jonoa.
b) Osoita, että on olemassa puolisuunnikas $ABCD$, jonka sivujen AB, BC, CD ja DA pituudet muodostavat aritmeettisen jonon, kun pituuksien järjestystä saa vaihtaa.

Tehtävä 13. Terävässä kolmiossa ABC jana CD on korkeusjana ja H korkeusjanojen leikkauspiste. Määritä kaikki mahdolliset kulman CAB arvot, kun oletetaan, että ympäri piirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee suoralla, joka sisältää kulman DHB kulmanpuolittajan.

Tehtävä 14. Olkoon kolmion ABC kaikki kulmat teräviä. Olkoon D sellainen sivulla AC ja E sellainen sivulla BC oleva piste, että A, B, D ja E ovat samalla ympyrällä. Oletetaan edelleen, että ympyrä, joka kulkee pisteiden D, E ja C jautta, leikkaa sivun AB kahdessa pisteessä X ja Y. Osoita, että janan XY keskipiste on C:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste AB:llä.

Tehtävä 15. Pisteet M ja N valitaan kolmion ABC kulmanpuolittajalta AL siten, että $\measuredangle ABM = \measuredangle ACN = 23°$. X on sellainen piste kolmion sisällä, että $|BX| = |CX|$ ja $\measuredangle BXC = 2\measuredangle BML$. Määritä $\measuredangle MXN$.

Tehtävä 16. Kun k on positiivinen kokonaisluku, merkitään $d(k)$:lla luvun k positiivisten tekijöiden lukumäärää (esim. $d(12) = 6$). Olkoon $s(k)$ luvun k numeroiden summa (esim. $s(12) = 3$). Positiivinen kokonaisluku n on *viihdyttävä*, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku k, jolle $d(k) = s(k) = n$. Mikä on pienin viihdyttävä pariton kokonaisluku, joka on suurempi kuin 1?

Tehtävä 17. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n, että luvun n^2 kymmenjärjestelmäesitys koostuu pelkästään parittomista numeroista.

Tehtävä 18. Olkoon p alkuluku. Jokaisella k, $1 \leq k \leq p-1$, on olemassa yksikäsitteinen kokonaisluku, jota merkitään k^{-1}, jolle $1 \leq k^{-1} \leq p-1$ ja $k^{-1} \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$. Todista, että jono

$$1^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}, \quad \ldots, \quad 1^{-1}+2^{-1}+\cdots+(p-1)^{-1}$$

(yhteenlasku modulo p) sisältää korkeintaan $(p+1)/2$ eri lukua.

Tehtävä 19. Mille k on olemassa k eri alkulukua $p_1, p_2, \ldots, p_k$, joille

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 = 2010?$$

Tehtävä 20. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille on olemassa sellainen ääretön positiivisten kokonaislukujen $\mathbb{Z}_+$ osajoukko A, että kaikilla eri luvuilla $a_1, \ldots, a_n \in A$ luvut $a_1 + \cdots + a_n$ ja $a_1 \cdots a_n$ ovat keskenään jaottomia.