Baltian tie

Reykjavik, 11.-15. marraskuuta

Version: *Finnish*

Aikaa: 4 ½ tuntia.
Kysymyksiä saa esittää ensimmäisten 30 minuutin aikana.
Ainoastaan kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.

Tehtävä 1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat yhtälön

$$(f(x))^n f(x+y) = (f(x))^{n+1} + x^n f(y)$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 2. Olkoot a, b, c kolmion sivujen pituudet. Osoita, että

$$\sqrt[3]{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} > \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Tehtävä 3. Määritä kaikki äärettömät positiivisten kokonaislukujen jonot $(a_1, a_2, \dots)$, jotka toteuttavat ehdon

$$a_{n+1}^2 = 1 + (n+2021)a_n$$

kaikilla $n \geq 1$.

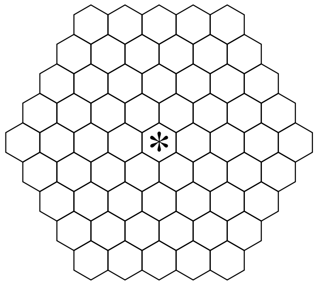
Tehtävä 4. Olkoon Γ ympyrä tasolla ja S piste ympyrällä Γ. Mario ja Luigi ajavat ympäri ympyrää Γ mikroautoillaan. He aloittavat yhtä aikaa pisteestä S. Kumpikin ajaa tasan 6 minuuttia vakionopeudella vastapäivään rataa pitkin. Näiden 6 minuutin aikana Luigi tekee tasan yhden kierroksen ympyrän Γ ympäri, kun taas Mario, joka ajaa kolminkertaisella nopeudella, ajaa kolme kierrosta.
Kun Mario ja Luigi ajavat mikroautoillaan, prinsessa Daisy asettaa itsensä siten, että hän on aina täsmälleen muiden autojen muodostavan jänteen keskipisteessä. Kun hän saavuttaa pisteen, jossa hän on jo käynyt, hän merkkaa sen banaanilla.
Kuinka monta pistettä tasolla, lukuunottamatta pistettä S, on merkattu banaanilla, kun 6 minuuttia on kulunut?

Tehtävä 5. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $x = y(3-y)^2$ ja $y = x(3-x)^2$. Etsi lausekkeen $x+y$ kaikki mahdolliset arvot.

Tehtävä 6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja t reaaliluku, joka ei ole nolla. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ reaalilukuja (eivät välttämättä erillisiä). Osoita, että on olemassa sellaiset toisistaan erilliset indeksit $i_1, i_2, \dots, i_n$, että kaikille $1 \leq k, l \leq n$ pätee $a_{i_k} - a_{i_l} \neq t$.

Tehtävä 7. Olkoon $n > 2$ kokonaisluku. Anna, Edda ja Magni pelaavat peliä kuusikulmion muotoisella laudalla, joka koostuu säännöllisen kuusikulmion muotoisista laatoista, joita on n kappaletta jokaisella sivulla. Kuva näyttää laudan, jolla on 5 laattaa jokaisella sivulla. Keskimmäinen laatta on merkattu.

Pelin alussa kivi on jollakin laudan kulmalaatalla. Edda ja Magni pelaavat samassa joukkueessa Annaa vastaan, ja he voittavat jos kivi on keskimmäisellä laatalla jonkun pelaajan vuoron lopussa. Anna, Edda ja Magni siirtävät kiveä vuorotellen siten, että Anna aloittaa, sitten siirtää Edda, sen jälkeen Magni, sitten taas Anna, jne.



Säännöt kunkin pelaajan vuorojen suhteen ovat seuraavat:

- Anna siirtää kiveä vierekkäiseen laattaan mihin tahansa suuntaan.
- Edda siirtää kiveä suoraan kahden laatan verran mihin tahansa 6 mahdollisesta suunnasta.
- Magni voi joko jättää vuoronsa väliin tai siirtää kiveä suoraan kolmen laatan verran mihin tahansa 6 mahdollisesta suunnasta.

Etsi kaikki luvut n, joilla Eddalla ja Magnilla on voittostrategia.

Tehtävä 8. Meillä on 2^{2^k} kolikkoa, missä k on ei-negatiivinen kokonaisluku. Tasan yksi kolikoista on väärennetty. Meillä on rajaton määrä palveluskoiria. Yksi koira on sairas, mutta emme tiedä, mikä. Testi koostuu kolmesta askeleesta: valitse jotkin kolikot kaikkien kolikoiden joukosta; valitse palveluskoira; koira haistaa valitut kolikot yhdellä kerralla. Terve koira haukkuu jos ja vain jos väärennetty kolikko on niiden joukossa. Sairas koira haukkuu tai ei hauku sattumanvaraisesti.
Muodosta strategia väärennetyn kolikon löytämiseksi korkeintaan $2^k + k + 2$ testillä ja todista, että strategia toimii.

Tehtävä 9. Tasolla on 2021 pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Näistä pisteistä minkä tahansa 5 pisteen joukosta vähintään 4 sijaitsevat samalla ympyrällä. Onko välttämättä totta, että vähintään 2020 näistä pisteistä sijaitsevat samalla ympyrällä?

Tehtävä 10. Johnilla on paperinpala, jolle on kirjoitettu riviin n reaalilukua $a_i \in [0, 1]$, missä $i \in \{1, \ldots, n\}$. Osoita, että mille tahansa annetulle $k < n$ hän voi leikata paperin k:hon epätyhjään paperinpalaan peräkkäisten lukujen väleistä siten, että jokaisen paperinpalan lukujen summa ei eroa minkään toisen paperinpalan summasta enempää kuin yhdellä.

Baltian tie

Reykjavik, 11.-15. marraskuuta

Version: *Finnish*

Tehtävä 11. Piste P sijaitsee kolmion ABC sisällä. Piste K on pisteen P projektio AB:lle ja piste L on pisteen P projektio AC:lle. Piste M sijaitsee suoralla BC siten, että $KM = LM$ ja piste P' on pisteen P peilaus pisteen M suhteen. Osoita, että $\angle BAP = \angle P'AC$.

Tehtävä 12. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Olkoon F pisteen A projektio sivulle BI ja G pisteen A projektio sivulle CI. Puolisuorat AF ja AG leikkaavat kolmion CFI ja BGI ympäri piirretyt ympyrät toisen kerran pisteissä K ja L (tässä järjestyksessä). Osoita, että suora AI puolittaa janan KL.

Tehtävä 13. Olkoon D teräväkulmaisen kolmion ABC kärjestä A piirretyn korkeusjanan kantapiste. Kulman DAC puolittaja leikkaa BC:n pisteessä K. Olkoon L pisteen K projektio AC:lle. Olkoon BL:n ja AD:n leikkauspiste M. Olkoon MC:n ja DL:n leikkauspiste P. Osoita, että $PK \perp AB$.

Tehtävä 14. Olkoon ABC kolmio, jonka ympäri piirretty ympyrä on Γ ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O. Olkoon M janan BC keskipiste. Piste D on pisteen A peilaus BC:n suhteen ja piste E on ympyrän Γ ja puolisuoran MD leikkauspiste. Olkoon S kolmion ADE ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Osoita, että pisteet A, E, M, O ja S sijaitsevat samalla ympyrällä.

Tehtävä 15. Mille positiivisille kokonaisluvuille $n \geq 4$ on olemassa konveksi n-kulmio, jonka sivujen pituudet ovat $1, 2, \ldots, n$ (jossakin järjestyksessä) ja jonka kaikki sivut ovat saman ympyrän tangentteja?

Tehtävä 16. Osoita, että mitkään nollasta eroavat kokonaisluvut a, b, x, y eivät toteuta ehtoa

$$\begin{cases} ax - by = 16, \\ ay + bx = 1. \end{cases}$$

Tehtävä 17. Toisistaan eroavat positiiviset kokonaisluvut a, b, c, d toteuttavat ehdot

$$\begin{cases} a \mid b^2 + c^2 + d^2, \\ b \mid a^2 + c^2 + d^2, \\ c \mid a^2 + b^2 + d^2, \\ d \mid a^2 + b^2 + c^2, \end{cases}$$

ja mikään niistä ei ole suurempi kuin kolmen muun luvun tulo. Kuinka moni luvuista a, b, c, d voi enimmillään olla alkuluku?

Tehtävä 18. Etsi kaikki kokonaislukukolmikot (a, b, c), jotka toteuttavat yhtälön

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$

Tehtävä 19. Etsi kaikki sellaiset kokonaislukukertoimiset polynomit p, että luku $p(a) - p(b)$ on jaollinen luvulla $a + b$ kaikille kokonaisluvuille a, b, kun edellytetään, että $a + b \neq 0$.

Tehtävä 20. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ ovat sellaisia, että $\text{pyj}(a_i, a_j) > 2n$ kaikille $1 \leq i < j \leq n$. Osoita, että

$$a_1 a_2 \ldots a_n \mid (n + 1)(n + 2) \ldots (2n - 1)(2n).$$