

Language: **Finnish**

Day: **1**



**EGMO 2013**

European Girls' Mathematical Olympiad

*Keskiviikko 10. huhtikuuta 2013*

**Tehtävä 1.** Kolmion  $ABC$  sivua  $BC$  jatketaan pisteen  $C$  toiselle puolelle sellaiseen pisteeseen  $D$  saakka, jolle  $CD = BC$ . Sivua  $CA$  jatketaan pisteen  $A$  toiselle puolelle sellaiseen pisteeseen  $E$  saakka, jolle  $AE = 2CA$ .

Osoita, että jos  $AD = BE$ , niin kolmio  $ABC$  on suorakulmainen.

**Tehtävä 2.** Etsi kaikki kokonaisluvut  $m$ , joilla  $m \times m$ -neliön voi pilkkoa viideksi suorakaiteeksi, joiden sivujen pituudet ovat kokonaisluvut  $1, 2, \dots, 10$  jossakin järjestyksessä.

**Tehtävä 3.** Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku.

- (a) Osoita, että on olemassa  $6n$  pareittain erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukko  $S$ , jonka minkä tahansa kahden alkion pienin yhteinen jaettava on enintään  $32n^2$ .
- (b) Osoita, että jokaisesta  $6n$  pareittain erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukosta  $T$  löytyy kaksi alkioita, joiden pienin yhteinen jaettava on suurempi kuin  $9n^2$ .

Language: Finnish

Day: 2



EGMO 2013

European Girls' Mathematical Olympiad

*Torstai 11. huhtikuuta 2013*

**Tehtävä 4.** Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut  $a$  ja  $b$ , joilla löytyy kolme peräkkäistä kokonaislukua, joilla polynomien

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

arvot ovat kokonaislukuja.

**Tehtävä 5.** Olkoon  $\Omega$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä  $\omega$  sivuaa sivuja  $AC$  ja  $BC$ , ja se sivuaa ympyrää  $\Omega$  sisäpuolelta pisteessä  $P$ . Eräs sivun  $AB$  suuntainen suora kulkee kolmion  $ABC$  läpi ja sivuaa ympyrää  $\omega$  pisteessä  $Q$ .

Osoita, että  $\angle ACP = \angle QCB$ .

**Tehtävä 6.** Lumikki ja seitsemän kääpiötä asuvat talossaan metsän siimeksissä. Kuudestatoista peräkkäisestä päivästä jokaisena eräät kääpiöt työskentelivät timanttikaivoksessa kun taas loput kääpiöt keräsivät metsässä marjoja. Kukaan kääpiöistä ei tehnyt minkään päivän aikana molempia töitä. Minä tahansa kahtena eri (ei välttämättä peräkkäisenä) päivänä ainakin kolme kääpiötä tekivät kukin molempia töitä. Lisäksi ensimmäisenä päivänä kaikki seitsemän kääpiötä työskentelivät timanttikaivoksessa.

Osoita, että jonakin näistä 16 päivästä kaikki seitsemän kääpiötä keräsivät marjoja.