Torstai 16. huhtikuuta 2015

Tehtävä 1. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja olkoon sen pisteestä C piirretyn korkeusjanan kantapiste D. Kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa suoraa CD pisteessä E ja kolmion $\triangle ADE$ ympäripiirrettyä ympyrää ω pisteessä F. Jos $\angle ADF = 45°$, niin osoita, että CF sivuaa ympyrää ω.

Tehtävä 2. *Domino* on 2×1- tai 1×2-laatta. Selvitä kuinka monella eri tavalla n^2 dominoa voi asettaa $2n \times 2n$-shakkilaudalle ilman päällekkäisyyksiä niin, että jokainen 2×2-neliö sisältää ainakin kaksi peittämätöntä ruutua, jotka ovat samalla rivillä tai samalla sarakkeella.

Tehtävä 3. Olkoot n ja m kokonaislukuja ja suurempia kuin 1, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_m$ positiivisia kokonaislukuja, jotka eivät ole isompia kuin n^m. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut $b_1, b_2, \ldots, b_m$, jotka eivät ole isompia kuin n, ja joille

$$\mathrm{syt}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

missä $\mathrm{syt}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tarkoittaa lukujen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ suurinta yhteistä tekijää.

Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Perjantai 17. huhtikuuta 2015

Tehtävä 4. Selvitä onko olemassa ääretöntä jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiivisia kokonaislukuja, jolle kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee yhtälö

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Tehtävä 5. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $m > 1$. Anastasia osittaa kokonaisluvut $1, 2, \ldots, 2m$ kaikkiaan m pariksi. Sitten Boris valitsee yhden kokonaisluvun jokaisesta parista ja laskee valitsemiensa kokonaislukujen summan. Osoita, että Anastasia voi valita parit niin, että Borisin saama summa ei voi olla tasan n.

Tehtävä 6. Olkoon H teräväkärkisen kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja G sen painopiste, ja olkoon $AB \neq AC$. Suora AG leikkaa kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirrettyä ympyrää pisteissä A ja P. Olkoon P' pisteen P peilikuva suoran BC suhteen. Osoita, että $\angle CAB = 60°$ jos ja vain jos $HG = GP'$.

Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen