ENSIMMÄINEN PÄIVÄ

Bukarest, 16. 7. 1999

Kesto: 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.

Tehtävä 1.

Määritä kaikki äärelliset tasojoukot S, joissa on vähintään kolme pistettä ja jotka täyttävät seuraavan ehdon:

> kun A ja B ovat joukon S kaksi eri pistettä, joukko S on symmetrinen janan AB keskinormaalin suhteen.

Tehtävä 2.

Olkoon n kiinteä kokonaisluku, jolle $n \geq 2$.

(a) Määritä pienin sellainen vakio C, että kaikilla reaalisilla $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ pätee epäyhtälö

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \Big(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \Big)^4.$$

(b) Määritä, milloin yhtäsuuruus on voimassa, kun C on kuten yllä.

Tehtävä 3.

Tarkastellaan $n \times n$-lautaa, missä n on kiinteä positiivinen parillinen kokonaisluku. Lauta koostuu n^2 yksikköruudusta. Kahden eri ruudun sanotaan olevan *vierekkäiset*, jos niillä on yhteinen sivu.

Laudan N ruutua merkitään niin, että jokaisen laudan (merkityn tai merkitsemättömän) ruudun vieressä on vähintään yksi merkitty ruutu.

Määritä luvun N pienin mahdollinen arvo.