TOINEN PÄIVÄ

Bukarest, 17. 7. 1999

Kesto: 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.

Tehtävä 4.

Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit (n, p), että

p on alkuluku,

$n \leq 2p$ ja

$(p-1)^n + 1$ on jaollinen luvulla n^{p-1}.

Tehtävä 5.

Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 sisältyvät ympyrään Γ ja sivuavat ympyrää Γ eri pisteissä M ja N. Ympyrä Γ_1 kulkee ympyrän Γ_2 keskipisteen kautta. Ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 leikkauspisteiden kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän Γ pisteissä A ja B. Suorat MA ja MB leikkaavat ympyrän Γ_1 pisteissä C ja D.

Todista, että suora CD sivuaa ympyrää Γ_2.

Tehtävä 6.

Määritä kaikki sellaiset kuvaukset $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että jokaisella $x, y \in \mathbb{R}$ on voimassa yhtälö

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x\, f(y) + f(x) - 1.$$