

46. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset

Mérida, Mexico

Ensimmäinen päivä

Keskiviikko, 13. heinäkuuta 2005

Language: Finnish

Tehtävä 1. Tasasivuisen kolmion ABC sivuilta valitaan kuusi pistettä: A_1 ja A_2 sivulta BC , B_1 ja B_2 sivulta CA ja C_1 sekä C_2 sivulta AB . Pisteet muodostavat kuperan kuusikulmion $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, jonka sivut ovat yhtä pitkiä. Osoita, että suorat A_1B_2 , B_1C_2 ja C_1A_2 leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Tehtävä 2. Kokonaislukujonossa a_1, a_2, \dots on äärettömän monta positiivista ja äärettömän monta negatiivista jäsentä. Oletetaan, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n lukujen a_1, a_2, \dots, a_n jakojäännökset n :llä jaettaessa ovat n eri lukua. Osoita, että jokainen kokonaisluku esiintyy tässä jonossa täsmälleen kerran.

Tehtävä 3. Positiiviset reaalityöt x, y ja z toteuttavat ehdon $xyz \geq 1$. Todista, että

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Työaika $4\frac{1}{2}$ tuntia.

Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.

46. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset

Mérida, Mexico

Toinen päivä

Torstai, 14. heinäkuuta 2005

Language: Finnish

Tehtävä 4. Tarkastellaan kaavan

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

määrittelemää lukujonoa a_1, a_2, \dots . Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla ei ole yhteistä tekijää jonon minkään luvun kanssa.

Tehtävä 5. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ sivut BC ja AD ovat yhtä pitkät mutta erisuuntaiset. Olkoon E sivun BC ja F sivun AD sisäpiste ja olkoon $BE = DF$. Suorat AC ja BD leikkaavat pisteessä P , suorat BD ja EF leikkaavat pisteessä Q ja suorat EF ja AC leikkaavat pisteessä R . Tarkastellaan kaikkia kolmioita PQR , kun E ja F liikkuvat. Osoita, että näiden kolmioiden ympäri piirretyillä ympyröillä on P :n lisäksi toinenkin yhteinen piste.

Tehtävä 6. Matematiikkakilpailussa oli 6 tehtävää. Mitkä tahansa kaksi näistä tehtävistä ratkaisi yli $\frac{2}{5}$ kilpailijoista. Kukaan kilpailijoista ei ratkaissut kaikkia kuutta tehtävää. Osoita, että ainakin kaksi kilpailijoista ratkaisi tasan 5 tehtävää kumpikin.

Työaika $4\frac{1}{2}$ tuntia.

Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.