12. heinäkuuta 2006

Tehtävä 1. Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Kolmion sisäpiste P toteuttaa ehdon

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Osoita, että $AP \geq AI$ ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $P = I$.

Tehtävä 2. Kutsumme säännöllisen 2006-kulmion P lävistäjää *hyväksi janaksi*, jos sen päätepisteet jakavat P:n piirin kahteen osaan, joista kumpikin koostuu parittomasta määrästä P:n sivuja. Myös P:n sivuja pidetään *hyvinä janoina*.

Monikulmio P jaetaan kolmioiksi 2003:lla lävistäjällä, jotka eivät leikkaa toisiaan P:n sisällä. Määritä sellaisten jaossa syntyvien tasakylkisten kolmioiden, joiden sivuista kaksi on hyviä janoja, suurin mahdollinen lukumäärä.

Tehtävä 3. Määritä pienin reaaliluku M, jolle epäyhtälö

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla a, b ja c.

Työaikaa 4 *tuntia* 30 *minuuttia.*
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.