

13. heinäkuuta 2006

**Tehtävä 4.** Määritä kaikki kokonaislukuparit  $(x, y)$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Tehtävä 5.** Kokonaislukukertoimisen polynomin  $P$  aste on  $n$ ,  $n > 1$ . Olkoon  $k$  mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

missä  $P$  esiintyy  $k$  kertaa. Todista, että on olemassa enintään  $n$  kokonaislukua  $t$ , joille pätee  $Q(t) = t$ .

**Tehtävä 6.** Liitetään jokaiseen kuperan monikulmion  $P$  sivuun  $b$  suurimman sellaisen kolmion ala, joka on kokonaan  $P$ :n sisällä ja jonka yksi sivu on  $b$ . Osoita, että kaikkiin  $P$ :n sivuihin liitettyjen alojen summa on ainakin kaksi kertaa  $P$ :n ala.

*Työaika 4 tuntia 30 minuuttia.  
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.*