

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Keskiviikko, 16. heinäkuuta 2008

1. tehtävä. Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on H . Pisteeseen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun BC keskipiste, leikkaa suoran BC pisteissä A_1 ja A_2 . Vastaavasti pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun CA keskipiste, leikkaa suoran CA pisteissä B_1 ja B_2 , ja pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun AB keskipiste, leikkaa suoran AB pisteissä C_1 ja C_2 . Osoita, että pisteet A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ja C_2 ovat samalla ympyrällä.

2. tehtävä. (a) Todista, että

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

kaikille reaaliluvuille x, y ja z , jotka ovat eri suuria kuin 1 ja joille pätee $xyz = 1$.

(b) Osoita, että äärettömän monella rationaalilukukolmikolla x, y, z , missä kaikki luvut ovat eri suuria kuin 1 ja $xyz = 1$, edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

3. tehtävä. Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n , jolle luvulla $n^2 + 1$ on lukua $2n + \sqrt{2n}$ suurempi alkutekijä.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Torstai, 17. heinäkuuta 2008

4. tehtävä. Määritä kaikki funktiot $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (f on siis positiivisten reaalilukujen joukossa määritelty funktio, jonka arvot ovat positiivisia reaalilukuja), joille pätee

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla w, x, y ja z , jotka toteuttavat ehdon $wx = yz$.

5. tehtävä. Olkoot n ja k , $k \geq n$, positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $k - n$ parillinen. Olkoon annettuna $2n$ lamppua, jotka on varustettu numeroin $1, 2, \dots, 2n$ ja joista jokainen voi *palaa* tai olla *pimeänä*. Aluksi kaikki lamput ovat pimeinä. Tarkastellaan askelista koostuvia jonoja. Jokaisella askeleella jonkin lampun tila vaihdetaan päinvastaiseksi (lamppu sytytetään tai sammutetaan).

Olkoon N kaikkien sellaisten k :sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \dots, n$ palavat ja lamput $n + 1, \dots, 2n$ ovat pimeinä.

Olkoon M kaikkien sellaisten k :sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \dots, n$ palavat ja lamput $n + 1, \dots, 2n$ ovat pimeinä, mutta lamppuja $n + 1, \dots, 2n$ ei ole kertaakaan sytytetty.

Määritä suhde N/M .

6. tehtävä. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $BA \neq BC$. Kolmioiden ABC ja ADC sisään piirretyt ympyrät ovat ω_1 ja ω_2 . Oletetaan, että on olemassa ympyrä ω , joka sivuaa puolisuoraa BA eri puolella A :ta kuin B ja puolisuoraa BC eri puolella C :tä kuin B ja joka myös sivuaa suoraa AD ja CD . Osoita, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste on ympyrällä ω .

Language: Finnish

*Työaika 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.*