

Tehtävä 1. Määritä kaikki funktiot $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joille yhtälö

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

pätee kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on $\leq z$.)

Tehtävä 2. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja olkoon Γ ABC :n ympäri piirretty ympyrä. Suora AI leikkaa Γ :n myös pisteessä D . Olkoon E kaaren \widehat{BDC} piste ja F sivun BC piste siten, että

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Olkoon vielä G janan IF keskipiste. Todista, että suorat DG ja EI leikkaavat ympyrän Γ pisteessä.

Tehtävä 3. Olkoon \mathbb{N} positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, joille

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

on neliöluku kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$.

Torstai, 8. heinäkuuta 2010

Tehtävä 4. Olkoon P kolmion ABC sisäosan piste. Suorat AP , BP ja CP leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ myös pisteissä K , L ja M , tässä järjestyksessä. Pisteeseen C piirretty Γ :n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä S . Oletetaan, että $SC = SP$. Todista, että $MK = ML$.

Tehtävä 5. Jokaisessa kuudesta rasiassa B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ja B_6 on aluksi yksi kolikko. Kahden-tyyppiset siirrot ovat sallittuja:

Siirto 1: Valitaan epätyhjä rasia B_j , $1 \leq j \leq 5$, poistetaan rasiasta B_j yksi kolikko ja lisätään kaksi kolikkoa rasiaan B_{j+1} .

Siirto 2: Valitaan epätyhjä rasia B_k , $1 \leq k \leq 4$, poistetaan rasiasta B_k yksi kolikko ja vaihdetaan rasioiden B_{k+1} ja B_{k+2} (mahdollisesti tyhjet) sisällöt keskenään.

Selvitä, onko olemassa sellaista näiden siirtojen äärellistä jonoa, jotka johtaisivat tilanteeseen, jossa rasiat B_1, B_2, B_3, B_4 ja B_5 ovat tyhjiä ja rasiassa B_6 on tasan $2010^{2010^{2010}}$ kolikkoa. ($a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Tehtävä 6. Olkoon a_1, a_2, a_3, \dots jono positiivisia reaalilukuja. Oletetaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku s , siten että

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

kaikilla $n > s$. Todista, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut ℓ ja N , $\ell \leq s$, siten että $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ kaikilla $n \geq N$.