

Lukion matematiikkakilpailu

Loppukilpailu 28. 1. 2000

1. Kaksi ympyrää sivuaa ulkopuolisesti toisiaan pisteessä A . Ympyröiden yhteinen tangentti sivuaa toista ympyrää pisteessä B ja toista pisteessä C ($B \neq C$). Janat BD ja CE ovat ympyröiden halkaisijoita. Todista, että pisteet D , A ja C ovat samalla suoralla.
2. Todista, että luvun $(3 + \sqrt{5})^n$ kymmenjärjestelmäesityksen kokonaisosa on aina pariton luku, oli n mikä hyvänsä positiivinen kokonaisluku.
3. Tutki, millä n :n positiivisilla kokonaislukuarvoilla pätee epäyhtälö

$$n! > \sqrt{n^n}.$$

4. Tasossa on seitsemän pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Kaikki pisteet yhdistetään toisiinsa janoilla. Jokainen näistä janoista on joko sininen tai punainen. Todista, että näin syntyneessä kuviossa on aina vähintään neljä kolmiota, joiden kaikki sivut ovat samanväriset.
5. Irja ja Valtteri heittävät vuorotellen kolikkoa ja Irja aloittaa. Kummallakin on pelinappula, ja alussa nappulat sijaitsevat pelilautana käytettävän neliön vastakkaisissa kärjissä. Jos heittovuorossa oleva pelaaja saa kruunan, hän siirtää nappulansa neliön vastakkaiseen kärkeen, mutta muuten viereiseen kärkeen niin, että Irja siirtää nappulaansa vastapäivään ja Valtteri myötäpäivään. Pelin voittaa se, joka saa siirrettyä nappulansa siihen kärkeen, jossa vastustajan nappula on. Kuinka suuri on todennäköisyys, että Irja voittaa pelin?

Aikaa 3 tuntia.

Kirjoita jokainen ratkaisu omalle paperilleen.
Muista kirjoittaa nimesi jokaiseen ratkaisupaperiin!
Laskimien ja taulukkokirjojen käyttö on kielletty.