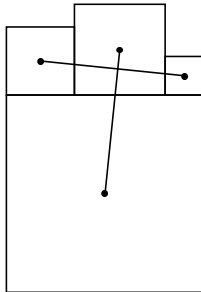


Lukion matematiikkakilpailun  
loppukilpailu, 4. 2. 2005

1. Oheisessa kuviossa on neljän neliön keskipisteet yhdistetty kahdella janalla. Osoita, että nämä kaksi janaa ovat kotisuorassa toisiaan vastaan.



2. Ravintolan pyöreän pöydän ääressä on 12 istumapaikkaa. Paikalle saapuu viiden naisen ja seitsemän miehen seurue. Kuinka monesta erilaisesta istumajärjestyksestä he voivat valita, kun jokaisella naisella tulee olla molemmilla puolillaan mies ja kahta istumajärjestystä pidetään erilaisina, jos ainakin yhdellä henkilöllä on näissä järjestyksissä oikealla puolellaan istumassa eri henkilö?
3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (x + y)^3 = z \\ (y + z)^3 = x \\ (z + x)^3 = y. \end{cases}$$

4. Luvun kymmenjärjestelmäesityksessä esiintyvät numerot 1, 3, 7 ja 9. Osoita, että luvun numeroiden järjestystä muuttamalla saadaan aikaan 7:llä jaollinen luku.
5. Sanotaan äärellisen jonon olevan *sekaisin*, jos minkään eri jäsenten keskiarvo ei koskaan ole jonossa näiden välissä. Esim. jono  $(0, 2, 1)$  on sekaisin, sillä  $1 = \frac{0+2}{2}$  ei ole lukujen 0 ja 2 välissä sekä muut keskiarvot  $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$  ja  $\frac{2+1}{2} = 1\frac{1}{2}$  eivät edes esiinny jonossa. Todista, että jokaisella  $n \in \mathbb{N}$  on olemassa sekaisin oleva jono, joka luettelee toistotta luvut  $0, 1, \dots, n$ .

---

Työaika on **3 tuntia**.

Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulle.

Taulukot ja laskimet ovat kiellettyjä.

Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi.

Kirjoita luettavasti.