2. 2.

Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu

2007

1. Osoita, että kun alkuluku jaetaan 30:llä, jakojäännös on joko 1 tai alkuluku. Päteekö samanlainen väite, kun jakaja on 60 tai 90?

2. Määritä yhtälön

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

3. Tasossa on viisi pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että jotkin neljä näistä ovat kuperan nelikulmion kärkiä.

4. Salavaaran kaupunkiin rakennetaan kuuden viraston välille pikoteknologiaa käyttävä tietoliikenneverkko niin, että aina kahden viraston välillä on suora kaapeliyhteys. Verkon rakentaminen kilpailutetaan kolmen operaattorin välillä siten, että kukin yhteys kilpailutetaan erikseen. Kun verkko on rakennettu, huomataan, että eri operaattorien järjestelmät eivät olekaan keskenään yhteensopivia. Kaupunki joutuu hylkäämään siksi kahden operaattorin rakentamat yhteydet, missä nämä hylättävät operaattorit valitaan niin, että vahinko on mahdollisimman pieni. Kuinka moni virasto vähintään voi olla keskenään yhteydessä, mahdollisesti monen yhteyden kautta, kun tilanne oli alun perin pahin mahdollinen?

5. Osoita, että on olemassa sellainen kokonaiskertoiminen polynomi $P(x)$, että yhtälöllä $P(x) = 0$ ei ole kokonaislukuratkaisuja, mutta jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n on olemassa $x \in \mathbb{Z}$, jolle $n \mid P(x)$.

Laskuaikaa on **3 tuntia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi.