12. 11.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

2013

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Mitkä seuraavista luvuista ovat yhtä suuria?

a) $\sqrt{2}$ ja 1,414213562373
b) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ ja $\sqrt{2}-\sqrt{3}$
c) $\sqrt{7}$ ja 2,645751311064
d) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ ja $\sqrt{7}+\sqrt{2}$

2. Ilmapalloon puhalletaan lisää ilmaa niin paljon, että pallon tilavuus kasvaa 237,5%. Silloin pallon pinta-ala kasvaa

a) 100%
b) 125%
c) vähintään 150%
d) korkeintaan 175%

3. Lukuja on $n > 1$ kappaletta ja niiden keskiarvo on $M \neq 0$. Yksi luku, a, poistetaan ja jäljelle jääneiden lukujen keskiarvo lasketaan.

a) Uusi keskiarvo on $\dfrac{M-a}{n-1}$.
b) Uusi keskiarvo voi olla alkuperäistä keskiarvoa pienempi.
c) Uuden keskiarvon ja luvun M erotus on $\dfrac{M-a}{n-1}$.
d) Kun lasketaan keskiarvo uudesta keskiarvosta ja luvusta M, saadaan $\dfrac{nM-a}{2(n-1)}$.

4. Lauseketta

$$\frac{c}{a+\frac{b}{c}}+\frac{a+c}{a-\frac{b}{c}}$$

sievennetään. Mitkä seuraavista tuloksista ovat oikein kaikilla lukujen a, b ja c arvoilla?

a) 0
b) $\dfrac{c(2bc+a^2c+ab)}{b^2-a^2c^2}$
c) $\dfrac{ac(2c^2+b+ac)}{a^2c^2-b^2}$
d) $\dfrac{ac}{ac-b}+\dfrac{2ac^3}{(ac+b)(ac-b)}$

5. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään $S(n)$:llä luvun n numeroiden summaa (kymmenjärjestelmässä). Mitkä seuraavista pätevät kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n?

a) $S(3n)$ on jaollinen kolmella	b) $S(2n) \leq 2S(n)$
c) $S(2n) \geq \frac{1}{2}S(n)$	d) $S(7n)$ on jaollinen seitsemällä

6. Tiedetään, että

$$\frac{8^x}{2^{x+y}} = 64 \text{ ja } \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} = 243.$$

Silloin $2xy$ on

a) negatiivinen	b) 5
c) 7	d) pariton kokonaisluku.

7. P on suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan AB piste. Tiedetään, että

$$|PB| : |PC| : |PA| = 1 : 2 : 3.$$

Määritä kolmion sivujen suhteet.

8. Osoita, että jos reaaliluvuille x, y ja z on voimassa $(x+y+z)^2 = 3(xy+xz+yz)$, täytyy lukujen olla keskenään yhtä suuria.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

12. 11. 2013

1. Lukuja on $n > 1$ kappaletta ja niiden keskiarvo on $M \neq 0$. Yksi luku, a, poistetaan ja jäljelle jääneiden lukujen keskiarvo lasketaan.

a) Uusi keskiarvo on $\dfrac{M-a}{n-1}$.
b) Uusi keskiarvo voi olla alkuperäistä keskiarvoa pienempi.
c) Uuden keskiarvon ja luvun M erotus on $\dfrac{M-a}{n-1}$.
d) Kun lasketaan keskiarvo uudesta keskiarvosta ja luvusta M, saadaan $\dfrac{nM-a}{2(n-1)}$.

2. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään $S(n)$:llä luvun n numeroiden summaa (kymmenjärjestelmässä). Mitkä seuraavista pätevät kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n?

a) $S(3n)$ on jaollinen kolmella
b) $S(2n) \leq 2S(n)$
c) $S(2n) \geq \frac{1}{2}S(n)$
d) $S(7n)$ on jaollinen seitsemällä

3. Yhtälöllä $x^3+3ax^2+bx+c=0$ on kolme ratkaisua, jotka muodostavat aritmeettisen lukujonon. (Kolmikko on aritmeettinen lukujono, jos keskimmäinen jäsen on kahden muun keskiarvo.) Silloin varmasti

a) $ab = 2a^3 + c$
b) $a = 0$
c) $3a + c = 2b$
d) $b = 3ac$

4. Kolmiolle ABC pätee $|AB| < |AC|$. Olkoon tämän kolmion ympäri piirretty ympyrä S. Pisteestä A piirretty kohtisuora janalle BC kohtaa ympyrän S uudestaan pisteessä P. Piste X sijaitsee janalla AC, ja janan BX jatke kohtaa ympyrän S pisteessä Q. Osoita, että jos $|BX| = |CX|$, niin PQ on ympyrän S halkaisija.

5. Lautapasianssissa on käytössä yksi sininen ja kolme valkoista nappulaa, jotka pystyy sijoittamaan 2013×2013-ruudukon ruutuihin. Yksittäisellä siirrolla tartutaan yhteen nappuloista ja sitä siirretään mahdollisimman pitkälle vasemmalle, oikealle, ylös tai alas vapaana olevaan ruutuun, kunnes pelilaudan reuna tai toinen nappula tulee vastaan. Todista, että alkuasemasta riippumatta sinisen nappulan saa sopivalla siirtosarjalla pelattua mihin tahansa ruutuun.

6. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut m ja n, että n on pariton ja yhtälö

$$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$$

toteutuu.

12. 11.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

2013

1. Tiedetään, että

$$\frac{8^x}{2^{x+y}} = 64 \text{ ja } \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} = 243.$$

Määritä $2xy$.

2. Eräs harvinainen sairaus on keskimäärin yhdellä miljoonasta ihmisestä. Sairaus testataan kokeella, joka antaa oikean tuloksen 99 % todennäköisyydellä riippumatta siitä, onko testattava sairas vai ei. Satunnaisesti valittu henkilö saa testistä positiivisen tuloksen. Millä todennäköisyydellä hänellä on sairaus?

3. Paperilla on kaksi pistettä A ja B, joiden etäisyys on yli 10 cm mutta alle 20 cm. Käytettävissäsi on viivoitin, jonka pituus on tasan 10 cm ja harppi, jolla voi piirtää ympyröitä, joiden säde on enintään 10 cm. Miten näillä työkaluilla pystytään piirtämään jana AB?

4. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään $S(n)$:llä luvun n numeroiden summaa (kymmenjärjestelmässä). Mitkä rationaaliluvut q voidaan esittää muodossa

$$q = \frac{S(2n)}{S(n)}$$

jollakin positiivisella kokonaisluvulla n?

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).