Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ensimmäinen kierros 2014

Ratkaisuja

Sulkeissa oleva nimi osoittaa, että kyseinen ratkaisu perustuu asianomaisen henkilön kilpailuvastaukseen.

1. *Oletetaan, että reaaliluvuille x ja y pätee $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$. Mitä arvoja $x+y$ voi saada?*

Ratkaisu 1. Luvut x ja y toteuttavat yhtälön

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=-y+\sqrt{y^2+1}$$

eli

$$x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}.$$

Mutta kun x ja y vaihdetaan toisiinsa, saadaan aivan samoin myös yhtälö

$$x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}.$$

Siis $x+y=-(x+y)$. Tämä on mahdollista vain, kun $x+y=0$.

Ratkaisu 2. Luvut $x+\sqrt{x^2+1}$ ja $y+\sqrt{y^2+1}$ ovat tehtävän ehdon mukaan toistensa käänteislukuja. On siis jokin $a\neq 0$, jolle pätee

$$x+\sqrt{x^2+1}=a,\quad y+\sqrt{y^2+1}=\frac{1}{a}. \tag{1}$$

Jos x toteuttaa edellisistä yhtälöistä ensimmäisen, niin $x^2+1=(a-x)^2=a^2-2ax+x^2$, joten $1=a^2-2ax$. Siis

$$x=\frac{a^2-1}{2a}.$$

Jälkimmäinen yhtälöistä (1) on muuten sama kuin edellinen, mutta a:n tilalla on $\frac{1}{a}$. Yhtälön ratkaisu on siis

$$y=\frac{\frac{1}{a^2}-1}{\frac{2}{a}}=\frac{1-a^2}{2a}=-x.$$

Siis $x+y=0$.

Ratkaisu 3. Ratkaistaan yhtälö $a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 1$, missä a on x:stä riippumaton vakio, x:n suhteen. Samoin kuin ratkaisussa 2 saadaan

$$x = \frac{1-a^2}{2a}.$$

Sijoitetaan tähän $a = y + \sqrt{y^2+1}$. Saadaan

$$x = \frac{1-\left(y^2+2y\sqrt{y^2+1}+y^2+1\right)}{2\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)} = \frac{-2y\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)}{2\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)} = -y.$$

Siis $x + y = -y + y = 0$.

2. *Oletetaan, että yksittäinen lentokoneen moottori vikaantuu lennon aikana todennäköisyydellä p ja eri moottorien vikaantuminen on toisistaan riippumatonta. Tiedetään, että kaksimoottorinen lentokone pystyy lentämään yhdellä moottorilla ja nelimoottorinen lentokone silloin, kun koneen molemmilla puolilla on ainakin yksi toimiva moottori. Millä p:n arvoilla kaksimoottorinen kone on turvallisempi kuin nelimoottorinen kone?*

Ratkaisu 1. Kaksimoottorinen kone pystyy lentämään todennäköisyydellä $1-p^2$ ja nelimoottorinen todennäköisyydellä $1-p^4-4p^3(1-p)-2p^2(1-p)^2$; tämä saadaan tapauksista "kaikki moottorit vikaantuvat", "kolme moottoria vikaantuu ja yksi ei" (tällä yhdellä on neljä mahdollisuutta) ja "kaksi saman puolen (kaksi mahdollisuutta) moottoria vikaantuu, mutta toisen puolen moottorit eivät". Kaksimoottorinen kone on turvallisempi kaikilla niillä p:n arvoilla, jotka toteuttavat ehdon

$$1-p^2 > 1-p^4-4p^3(1-p)-2p^2(1-p)^2 = 1+p^4-2p^2 = (1-p^2)^2.$$

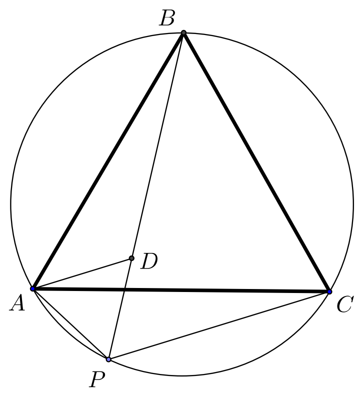
Koska $0 < 1-p^2 < 1$, epäyhtälö toteutuu kaikilla p:n arvoilla.

Ratkaisu 2. Tehtävän kaksimoottorinen kone on toimintakuntoinen, jos ei ole niin, että molemmat moottorit ovat vikaantuneet, siis todennäköisyydellä $1-p^2$. Nelimoottorisen koneen saman puolen molemmat moottorit vikaantuvat todennäköisyydellä p^2, joten ainakin toinen yhden puolen moottoreista toimii todennäköisyydellä $1-p^2$. Molemmilla puolilla on siis yksi toimiva moottori todennäköisyydellä $\left(1-p^2\right)^2$. Koska $0 < 1-p^2 < 1$ kaikilla $0 < p < 1$, $\left(1-p^2\right)^2 < 1-p^2$. Kaksimoottorinen kone pystyy siis todennäköisemmin lentämään eli se on turvallisempi.

Ratkaisu 3. Nelimoottorisen koneen kumpaakin puolta voidaan ajatella kaksimoottorisena koneena. Jos kaksimoottorisen koneen toimintatodennäköisyys on q, niin nelimoottorinen kone toimii vain, jos molemmat siihen kuuluvat kaksimoottoriset koneet toimivat. Tämän todennäköisyys on q^2. Koska $0 < q < 1$, $q^2 < q$.

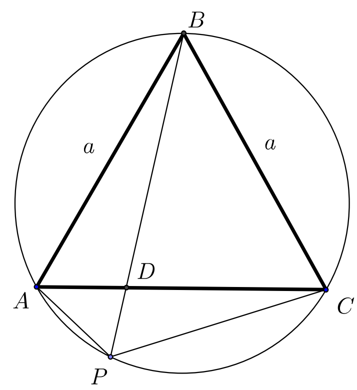
3. *Tarkastellaan tasasivuista kolmiota ABC. Piste P sijaitkoon lyhyemmällä kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän kaarella AC. Osoita, että $|PB| = |PA| + |PC|$.*

Ratkaisu 1. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle APB = \angle ACB = 60°$. Erotetaan janan PA pituinen jana PD janalta PB. Kolmio APD on tasakylkinen kolmio ja sen huippukulma $\angle APD = 60°$. Kolmio on silloin tasasivuinen: $|AB| = |AD|$. Jännenelikulmiossa $APCB$ on $\angle CBA = 60°$. Siis $\angle APC = 180° - 60° = 120°$. Myös $\angle ADB = 120°$. Kolmioissa APC ja ADB on näin ollen kaksi yhtä pitkää sivuparia, AC, AB ja AP, AD ja toisen sivuparin vastaiset kulmat ovat yhtä suuret. Lisäksi kulmat $\angle PCA$ ja $\angle DBA$ ovat kehäkulmalauseen nojalla yhtä suuret. Kolmiot ovat siis yhteneviä. Siis $|PC| = |DB|$ ja $|AP| + |PC| = |PD| + |DB| = |BP|$.



Ratkaisu 2. Olkoon D AC:n ja BP:n leikkauspiste. Kehäkulmalauseesta ja kolmion ABC tasasivuisuudesta seuraa $\angle APB = \angle ABC = 60° = \angle CAB$. Kolmioissa APB ja DAB on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoisia. Samalla perusteella kolmiot CPB ja DCB ovat yhdenmuotoisia. Jos merkitään $|AC| = |BC| = |AB| = a$, niin yhdenmuotoisuuksista seuraa

$$|AP| = |AD|\frac{|BP|}{a}, \quad |PC| = |DC|\frac{|BP|}{a}. \qquad (1)$$



Koska $|AD| + |DC| = a$, väite seuraa heti, kun yhtälöt (1) lasketaan puolittain yhteen.

Ratkaisu 2'. (Kalle Luopajärvi) Kehäkulmalauseen perusteella $\angle PAD = \angle PBC$ ja $\angle APD = 60° = \angle BPC$. Kolmiot APD ja BPC ovat siis yhdenmuotoisia. Näin ollen

$$\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|BP|}{a}.$$

Vastaavasti kolmiot ABP ja DCP ovat yhdenmuotoisia ja

$$\frac{|PC|}{|DC|} = \frac{|BP|}{|AB|} = \frac{|BP|}{a}.$$

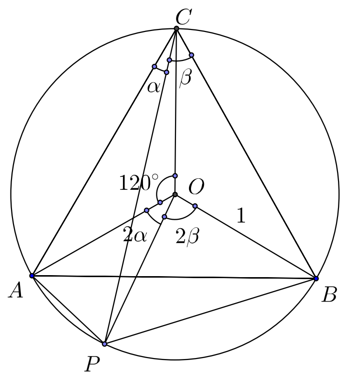
Saatiin ratkaisun 2 yhtälöt (1), ja väite seuraa samoin kuin ratkaisussa 2.

Ratkaisu 3. (Ella Tamir.) Luultavasti yksinkertaisimman todistuksen voi esittää, jos muistaa klassisen *Ptolemaioksen lauseen*. Sen mukaanhan jännenelikulmion lävistäjien tulo on sama kuin nelikulmion vastakkaisten sivuparien tulojen summa. Siis

$$|PB| \cdot |AC| = |AP| \cdot |BC| + |PC| \cdot |AB|.$$

Koska ABC on tasasivuinen, kolmion sivun pituus voidaan supistaa, jolloin jäljelle jää tehtävän väitös.

Ratkaisu 4. Jos ympyrän säde on R, ja jännettä XY vastaava keskuskulma on 2ϕ, niin suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa on R ja toinen kateetti jänteen puolikas, saadaan sinin määritelmän nojalla heti $|XY| = 2R\sin\phi$. Olkoon nyt O kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste. Valitaan ympyrän säde pituusyksiköksi. Merkitään $\angle ACP = \alpha$ ja $\angle PCB = \beta = 60° - \alpha$. Voidaan olettaa, että $\alpha \le \beta$. Silloin $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle POB = 2\beta$ ja $\angle POC = 120° + 2\alpha$. Siis $|AP| = 2\sin\alpha$, $|PB| = 2\sin\beta = 2\sin(60° - \alpha)$ ja $|PC| = 2\sin(60° + \alpha)$. Väite on tosi, jos $\sin\alpha + \sin(60° - \alpha) = \sin(60° + \alpha)$. Mutta koska $\cos 60° = \frac{1}{2}$, saadaan sinin yhteen- ja vähennyslaskukaavoista todellakin heti $\sin\alpha + \sin(60° - \alpha) = \sin\alpha + \sin 60° \cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \sin 60° \cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = \sin(60° + \alpha)$.

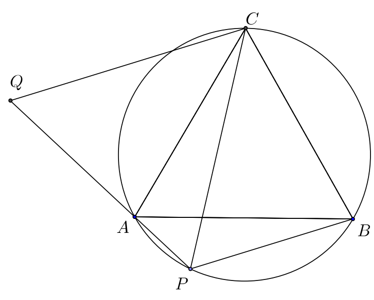


Ratkaisu 4'. (Henri Gröhn.) Jos merkinnät ovat niin kuin ratkaisussa 3, niin kosinilause antaa kolmioista BPO, APO ja PCO $|PB|^2 = 2 - 2\cos(120° + 2\alpha)$, $|AP|^2 = 2 - 2\cos(2\alpha)$ ja $|PC|^2 = 2 - 2\cos(2\beta) = 2 - 2\cos(120° - 2\alpha)$. Tehtävän yhtälön oikeaksi todistamiseksi on siis näytettävä, että

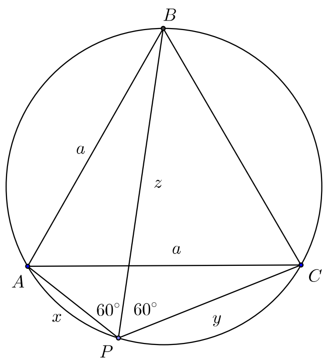
$$\sqrt{1 - \cos(120° + 2\alpha)} = \sqrt{1 - \cos(2\alpha)} + \sqrt{1 - \cos(120° - 2\alpha)}. \tag{1}$$

Relaatio $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ palauttaisi tämän ratkaisun 3 yhtälöön, mutta (1):n voi todistaa oikeaksi myös osoittamalla kosinin yhteenlaskukaavaa soveltamalla – verraten vaivalloisesti – että yhtälön molempien puolien neliöt ovat samat.

Ratkaisu 5. (Eljas Nietosvaara.) Erotetaan puolisuoralta PA jana AQ niin, että $|AQ| = |PB|$. Koska $APBC$ on jännenelikulmio, $\angle QAC = \angle PBC$ (Jännenelikulmiossa kulma ja vastakkaisen kulman vieruskulma ovat yhtä suuret.) Koska $|BC| = |AC|$, kolmiot PBC ja QAC ovat yhteneviä (sks). Siis $|CQ| = |CP|$, eli kolmio QPC on tasakylkinen. Kehäkulmalauseen nojalla lisäksi $\angle QPC = \angle ABC = 60°$, joten kolmio QPC on itse asiassa tasasivuinen. Siis $|PA| + |PB| = |PA| + |AQ| = |PQ| = |PC|$.



Ratkaisu 6. (Alpi Jokinen.) Merkitään $|AP| = x$, $|CP| = y$, $|BP| = z$, $|AB| = |AC| = a$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle APB = \angle BPC = 60°$, ja $\angle APC = 120°$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioihin APB ja APC. Siis



$$a^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos 60° = x^2 + z^2 - xz$$

ja

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = x^2 + y^2 + xy.$$

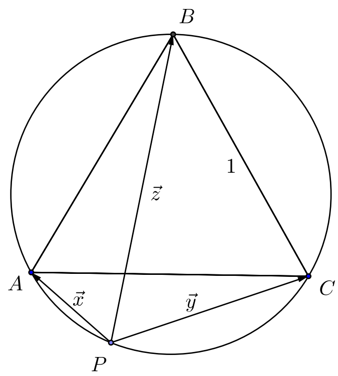
Tästä syntyy z:n toisen asteen yhtälö $z^2 - xz = y^2 + xy$.

Siitä ratkaistaan

$$z = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4(y^2 + xy)}\right).$$

Mutta $x^2 + 4(y^2 + xy) = (x + 2y)^2$, joten $z = \dfrac{1}{2}(x + (x + 2y)) = x + y$, ja väite on todistettu.

Ratkaisu 6'. Olkoon kolmion sivun pituus 1 ja $\vec{x} = \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{PC}$ ja $\vec{z})\overrightarrow{PB}$. Olkoon vielä $|\vec{x}| = x$, $|\vec{y}| = y$ ja $|\vec{z}| = z$. Koska $\angle APB = \angle BPC = 60°$ ja $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$, niin



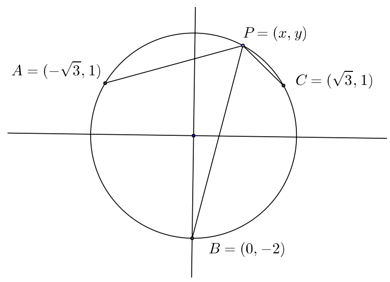
$$\begin{aligned}
1 = |AC|^2 &= (\vec{y} - \vec{x}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = x^2 + y^2 + xy,\\
1 = |BA|^2 &= (\vec{z} - \vec{x}) \cdot (\vec{z} - \vec{x}) = x^2 + z^2 - xz,\\
1 = |BC|^2 &= (\vec{z} - \vec{y}) \cdot (\vec{z} - \vec{y}) = y^2 + z^2 - yz,
\end{aligned}$$

Kahdesta viimeisestä yhtälöstä seuraa

$$x^2 - y^2 = (x - y)z,$$

ja jos $x \neq y$, niin $x + y = z$. Jos $x = y$, edellisistä yhtälöistä ensimmäinen antaa $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; toisen yhtälön $z^2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}z + \dfrac{1}{3} = 1$ ratkaisu on $z = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, joten tällöinkin $z = x + y$.

Ratkaisu 7. Voidaan olettaa, että kolmion ABC ympärysympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 4$ ja että $A = (\sqrt{3}, 1)$, $B = (0, -2)$, $C = (-\sqrt{3}, 1)$, $P = (x, y)$, missä $1 < y \le 2$. Nyt $|PA|^2 = (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 3 - 2y + 1 = 8 - 2y - 2\sqrt{3}x$ ja vastaavasti $|PC|^2 = 8 - 2y + 2\sqrt{3}x$. Edelleen $|PB|^2 = x^2 + (y + 2)^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 = 4y + 8$. Väite on tosi, jos



$$\sqrt{8 - 2y - 2\sqrt{3}x} + \sqrt{8 - 2y + 2\sqrt{3}x} = \sqrt{4y + 8}.$$

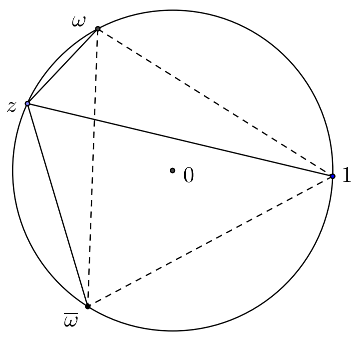
Yhtälön molemmilla puolilla olevat positiiviset luvut ovat samat, jos niiden neliöt ovat samat, eli jos

$$16 - 4y + 2\sqrt{(8 - 2y)^2 - 12x^2} = 4y + 8. \tag{1}$$

Mutta $(8 - 2y)^2 - 12x^2 = 64 - 32y + 4y^2 - 12(4 - y^2) = 16y^2 - 32y + 16 = (4(y - 1))^2$. Koska $y > 1$, yhtälöstä (1) tulee identtinen yhtälö $16 - 4y + 8y - 8 = 4y + 8$. Väitös on siis tosi.

Ratkaisu 8. Voidaan olettaa, että kolmion kärjet ovat kompleksiluvut $A = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \omega$, $B = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{\omega}$, $C = 1$. Kolmion ympärysympyrä on origokeskinen ympyrä $|z| = 1$ ja piste $P = z$, missä $|z| = 1$ ja $\mathrm{Re}z < -\dfrac{1}{2}$. Oikeaksi todistettava yhtälö on $|z - \omega| + |z - \overline{\omega}| = |z - 1|$. Se pätee, jos

$$|z - \omega|^2 + |z - \overline{\omega}|^2 + 2|(z - \omega)(z - \overline{\omega}| = |z - 1|^2. \quad (1)$$



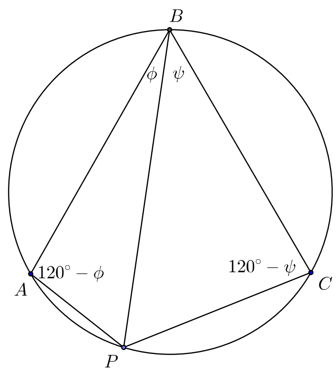
Kun neliöt ja tulo lasketaan ja otetaan huomioon, että

$z\overline{z} = \omega\overline{\omega} = 1$ ja $\omega + \overline{\omega} = -1$, (1) saadaan palautettua muotoon

$$|z^2 + z + 1| = -1 - z - \overline{z}. \tag{2}$$

(Koska $\mathrm{Re}z < -\dfrac{1}{2}$, yhtälön (2) oikea puoli on positiivinen luku.) Yhtälön (2) kummankin puolen neliö on $z^2 + \overline{z}^2 + 2z + 2\overline{z} + 3$, joten yhtälö on tosi.

Ratkaisu 9. Olkoon $\angle ACP = \phi$ ja $\angle PCB = \psi = 60^\circ - \phi$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle APC = \angle CPB = 60^\circ$, joten kolmion kulmien summasta saadaan heti $\angle CAP = 120^\circ - \phi$ ja $\angle PBC = 120^\circ - \psi$. Kun sovelletaan sinilausetta kolmioihin APC ja PBC, saadaan heti



$$\frac{|AP|}{\sin\phi} = \frac{|BP|}{\sin(120^\circ - \phi)}, \quad \frac{|PC|}{\sin\psi} = \frac{|BP|}{\sin(120^\circ - \psi)}.$$

Näin ollen

$$|AP|+|PC| = |BP|\left(\frac{\sin\phi}{\sin(120^\circ - \phi)} + \frac{\sin\psi}{\sin(120^\circ - \psi)}\right).$$

Väite on tosi, jos oikean puolen sulkeissa oleva lauseke on 1 eli jos

$$\sin\phi\sin(120^\circ - \psi) + \sin\psi\sin(120^\circ - \phi) = \sin(120^\circ - \phi)\sin(120^\circ - \psi).$$

Koska $\psi = 60^\circ - \phi$, edellinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\sin\phi\sin(60^\circ + \phi) + \sin(60^\circ - \phi)\sin(120^\circ - \phi) = \sin(120^\circ - \phi)\sin(60^\circ + \phi)$$

kanssa. Mutta koska $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, yhtälö voidaan kirjoittaa vielä yhtäpitävään muotoon

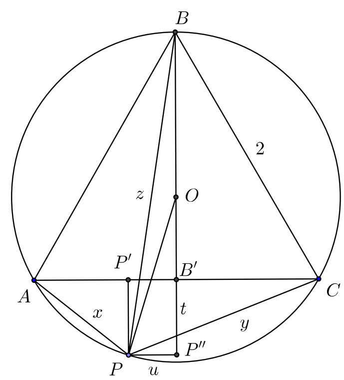
$$\sin\phi\sin(60^\circ + \phi) + \sin(60^\circ - \phi)\sin(60^\circ + \phi) = \sin(60^\circ + \phi)\sin(60^\circ + \phi)$$

eli

$$\sin\phi + \sin(60^\circ - \phi) = \sin(60^\circ + \phi). \tag{1}$$

Mutta sinin yhteenlaskukaavan ja tunnetun tosiasian $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ perusteella yhtälön (1) vasen puoli on $\sin\phi + \sin 60^\circ\cos\phi - \dfrac{1}{2}\sin\phi = \sin 60^\circ\cos\phi + \dfrac{1}{2}\sin\phi = \sin(60^\circ + \phi)$. Yhtälö (1) on siis tosi, ja todistus on valmis.

Ratkaisu 10. Olkoon B' kolmion ABC B:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste, P' ja P'' pisteen P kohtisuorat projektiot suorilla AB ja BB' ja O ABC:n ympärysympyrän keskipiste. Oletetaan, että kolmion sivun pituus on 2. Silloin $|BB'| = \sqrt{3}$, $|BO| = |OP| = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ ja $|OB'| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Olkoon $|AP| = x$, $|PC| = y$, $|PB| = z$, $|PP'| = |P''B'| = t$ ja $|P'B'| = |PP''| = u$. Silloin $|AP'| = 1 - u$ ja $|P'C| = 1 + u$. Sovelletaan toistuvasti Pythagoraan lausetta. Kolmiosta OPP'' saadaan



$$u^2 + \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3},$$

josta

$$u^2 + t^2 = 1 - \frac{2t}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

Kun (1) otetaan huomioon, saadaan kolmioista APP' ja PCP'

$$\begin{aligned} x^2 &= t^2 + (1-u)^2 = 2 - \frac{2t}{\sqrt{3}} - 2u, \\ y^2 &= t^2 + (1+u)^2 = 2 - \frac{2t}{\sqrt{3}} + 2u, \\ z^2 &= \left(t + \sqrt{3}\right)^2 + u^2 = 4 + \frac{4t}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Väitetty yhtälö $z = x + y$ toteutuu, jos $x^2 + y^2 + 2xy = z^2$ eli jos $4x^2y^2 = \left(z^2 - x^2 - y^2\right)^2$. Mutta, jälleen (1):n perusteella

$$x^2y^2 = \left(2 - \frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4u^2 = 4 - \frac{8t}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}t^2 - 4\left(1 - \frac{2t}{\sqrt{3}} - t^2\right) = \frac{16t^2}{3}$$

ja

$$z^2 - x^2 - y^2 = 4 + \frac{4t}{\sqrt{3}} - 4 + \frac{4t}{\sqrt{3}} = \frac{8t}{\sqrt{3}}.$$

Siis todellakin

$$\left(z^2 - x^2 - y^2\right)^2 = \frac{64t^2}{3} = 4 \cdot \frac{16t^2}{3} = 4x^2y^2.$$

4. *Laura ja Risto pelaavat seuraavaa peliä: Pöydällä on $\ell \geq 2$ lautasta, jotka ovat alun perin tyhjiä. Jokaisen kierroksen aluksi Laura siirtää osan lautasista vasemmalle ja loput oikealle puolelleen. Risto valitsee jommankumman puolen lautaset ja lisää kullekin yhden rusinan; lisäksi hän tyhjentää toisen puolen lautaset. Laura voi päättää pelin tähän ja laskea hyväkseen yhden lautasen rusinat, tai muuten peli lähtee uudelle kierrokselle. Todista, että jos Risto pelaa parhaalla mahdollisella tavalla, niin Laura voi voittaa korkeintaan $\ell - 1$ rusinaa.*

Ratkaisu. Olkoon a_j niiden lautasten lukumäärä, joilla on ainakin j rusinaa, kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että Risto voi aina pelata niin, että hänen vuoronsa jälkeen (ja siis Lauran tullessa vuoroon) $a_j \leq \ell - j$, kaikilla $j \leq \ell$ ja $a_j = 0$, jos $j > \ell$. Pelin alussa kaikki lautaset ovat tyhjiä, joten $a_0 = \ell = \ell - 0$ ja $a_j = 0 \leq \ell - j$, kun $j \leq \ell$. Oletetaan, että tämä tilanne vallitsee jonkin Riston vuoron jälkeen, kun on pelattu k kierrosta. Lauran siirron jälkeen niistä a_j lautasesta, joilla on ainakin j rusinaa, b_j on Lauran vasemmalla ja c_j Lauran oikealla puolella. Olkoon r suurin määrä rusinoita yhdellä lautasella. Induktio-oletuksen mukaan $r < \ell$. Voimme olettaa, että Laura on siirtänyt ainakin yhden sellaisen lautasen, jolla on r rusinaa, vasemmalle puolelleen: Siis $b_r > 0$. Riston siirto on nyt tyhjentää vasemmanpuoliset lautaset ja lisätä jokaiselle oikeanpuoleiselle lautaselle rusina. Tämä merkitsee sitä, että jokaisella $1 \leq j \leq \ell$ on c_{j-1} sellaista lautasta, jolla on ainakin j rusinaa. Mutta tehdyn oletuksen perusteella $c_{j-1} = a_{j-1} - b_{j-1} \leq a_{j-1} - b_r < a_{j-1} \leq \ell - (j-1) = \ell - j + 1$. Koska epäyhtälöketjussa on yksi aito epäyhtälö, on $c_{j-1} \leq \ell - j$. Välttämättä tietysti myös $j = 0$ toteuttaa induktioväitteen. $(k+1)$:n kierroksen tilanne on siis sama. Niiden lautasten lukumäärä, joilla on ainakin ℓ rusinaa on $\ell - \ell = 0$. Millään lautasella ei ole enempää kuin $\ell - 1$ rusinaa.