11. pohjoismainen kilpailu 9. 4. 1997

1. Jos A on joukko, jonka alkiot ovat seitsemän positiivista lukua, niin kuinka monta A:n alkioista muodostuvaa kolmikkoa (x, y, z), missä $x < y$ ja $x + y = z$, on enintään olemassa?

2. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio. Oletetaan, että nelikulmion sisällä on piste P, jolle kolmioiden ABP, BCP, CDP ja DAP alat ovat samat. Osoita, että nelikulmion lävistäjistä ainakin toinen jakaa toisen kahteen yhtä pitkään osaan.

3. Olkoot A, B, C ja D neljä eri pistettä tasossa. Janoista AB, AC, AD, BC, BD ja CD kolmen pituus on a. Muiden kolmen pituus on b, missä $b > a$. Määritä osamäärän $\frac{b}{a}$ kaikki mahdolliset arvot.

4. Olkoon f ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ määritelty funktio, jolle pätee

$$f(2x) = 2f(x), \quad f(4x+1) = 4f(x) + 3 \quad \text{ja} \quad f(4x-1) = 2f(2x-1) - 1.$$

Osoita, että f on injektio, ts. että jos $f(x) = f(y)$, niin $x = y$.