17. pohjoismainen matematiikkakilpailu

Torstaina, 3. 4. 2003

Tehtävä 1

10-riviselle 14-sarakkeiselle shakkiruudukolle asetetaan kiviä. Asettelun jälkeen havaitaan, että kullakin rivillä ja kullakin sarakkeella on pariton määrä kiviä. Näytä, että mustilla ruuduilla on parillinen määrä kiviä, kun ruudut on väritetty tavanomaisesti vuorotellen mustiksi ja valkoisiksi. Huomaa, että yhdellä ruudulla voi olla useampia kiviä.

Tehtävä 2

Etsi kaikki kokonaislukukolmikot (x, y, z), joille

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2003.$$

Tehtävä 3

Tasasivuisen kolmion $\triangle ABC$ sisällä on piste D, jolle pätee $\measuredangle ADC = 150°$. Todista, että kolmio, jonka sivut ovat $|AD|$, $|BD|$ ja $|CD|$, on välttämättä suorakulmainen.

Tehtävä 4

Olkoon $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nollasta poikkeavien reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, joille

$$f(x) + f(y) = f(xyf(x + y)),$$

kun $x, y \in \mathbb{R}^*$ ja $x + y \neq 0$.

Kokeen kesto: 4 tuntia.
Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 5 pistettä.
Vain kirjoittamiseen ja piirtämiseen tarvittavat välineet ovat sallittuja.