

## 24. pohjoismainen matematiikkakilpailu

13. huhtikuuta 2010

1. Kuvaus  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  on kasvava ja toteuttaa kaikilla keskenään jaottomilla positiivisilla kokonaisluvulla  $m$  ja  $n$  yhtälön  $f(mn) = f(m)f(n)$ . Tässä  $\mathbb{Z}_+$  on positiivisten kokonaislukujen joukko. Osoita, että  $f(8)f(13) \geq (f(10))^2$ .
2. Kolmella ympyrällä  $\Gamma_A$ ,  $\Gamma_B$  and  $\Gamma_C$  on yhteinen leikkauspiste  $O$ . Ympyröiden  $\Gamma_A$  ja  $\Gamma_B$  toinen leikkauspiste on  $C$ , ympyröiden  $\Gamma_A$  ja  $\Gamma_C$  vastaavasti  $B$ , sekä ympyröiden  $\Gamma_C$  ja  $\Gamma_B$  edelleen  $A$ . Suora  $AO$  leikkaa ympyrän  $\Gamma_A$  pisteessä  $X \neq O$ . Suora  $BO$  leikkaa ympyrän  $\Gamma_B$  pisteessä  $Y \neq O$ , ja suora  $CO$  ympyrän  $\Gamma_C$  pisteessä  $Z \neq O$ . Todista, että

$$\frac{|AY| |BZ| |CX|}{|AZ| |BX| |CY|} = 1.$$

3. Lauralla on edessään 2010 lamppua yhdistettynä 2010 nappikatkaisimeen. Hän haluaisi tuntea jokaista katkaisinta vastaavan lampun. Selvittääkseen tämän hän seuraa, mitkä lamput syttyvät, kun Risto painaa joitakin katkaisimia. (On myös mahdollista, ettei hän paina yhtäkään katkaisimista.) Risto painaa katkaisimia aina samanaikaisesti, joten lamputkin syttyvät samanaikaisesti.
  - a) Jos Risto valitsee painettavat katkaisimet, kuinka monta erilaista katkaisinkombinaatiota hän voi enintään painaa, ennen kuin Laura osaa liittää katkaisimet oikeisiin lampuihin?
  - b) Jos Laura valitsee katkaisinkombinaatiot, mikä on pienin määrä kombinaatioita, joiden avulla hän pystyy selvittämään, miten katkaisimet liittyvät lampuihin?
4. Kutsuttakoon positiivista kokonaislukua *yksinkertaiseksi*, jos sen tavanomaisessa kymmenjärjestelmäesityksessä ei ole muita numeroita kuin nolliä ja ykkösiä. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku  $k$ , jolle pätee, että jokainen positiivinen kokonaisluku  $n$  voidaan kirjoittaa muodossa  $n = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_k$ , jossa  $a_1, \dots, a_k$  ovat yksinkertaisia.

Kilpailu kestää 4 tuntia.

Kukin tehtävä on 5 pisteen tehtävä.

Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.