

28. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Maanantai 31. maaliskuuta 2014

*Työaika on 4 tuntia. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 5.
Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineiden käyttö on sallittua.*

1. TEHTÄVÄ

Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (missä \mathbb{N} on luonnollisten lukujen joukko, johon kuuluu 0), joille pätee

$$f(x^2) - f(y^2) = f(x + y)f(x - y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{N}$, joilla $x \geq y$.

2. TEHTÄVÄ

Määritä tasasivuisen kolmion kaikki sellaiset sisäpisteet, joiden etäisyys yhdestä kolmion kärjestä on niiden kolmion kahdesta muusta kärjestä mitattujen etäisyyksien geometrinen keskiarvo. [Lukujen x ja y geometrinen keskiarvo on \sqrt{xy} .]

3. TEHTÄVÄ

Määritä kaikki ei-negatiiviset kokonaisluvut a, b, c , joille

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{2014}.$$

4. TEHTÄVÄ

Pelilautana on $n \times n$ -šakkilauta. Pelin alussa joka ruudulla on 99 kiveä. Pelaajat A ja B valitsevat vuorotellen jonkin laudan vaaka- tai pystyrivin ja poistavat jokaisesta valitun rivin ruudusta yhden kiven. Pelaaja saa valita sellaisen rivin, jonka jokaisessa ruudussa on ainakin yksi kivi. Se pelaaja, joka ei voi valita tällaista riviä, häviää pelin. Pelaaja A aloittaa. Määritä kaikki ne luvut n , joilla hänellä on voittostrategia.