

31. Pohjoismainen matematiikkakilpailu maanantaina, 3. huhtikuuta 2017

*Työaika: 4 tuntia. Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 7 pistettä.
Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineitä saa käyttää.*

Tehtävä 1.

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut a ja b , joille

$$\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1.$$

Tehtävä 2.

Olkoot a , b , α ja β sellaisia reaalilukuja, että $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ja $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Todista, että jos

$$ab \cos(\alpha - \beta) \leq \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)},$$

niin

$$a \cos \alpha + b \sin \beta \leq 1 + ab \sin(\beta - \alpha).$$

Tehtävä 3.

Olkoot M ja N teräväkulmaisen kolmion ABC sivujen AC ja AB keskipisteet, missä $AB \neq AC$. Olkoon ω_B M -keskinen ympyrä, joka kulkee pisteen B kautta, ja olkoon ω_C N -keskinen pisteen C kautta kulkeva ympyrä. Olkoon D sellainen piste, että $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas ja AD on BC :n suuntainen. Oletetaan, että ω_B ja ω_C leikkaavat kahdessa (eri) pisteessä P ja Q . Osoita, että D sijaitsee suoralla PQ .

Tehtävä 4.

Määritä kaikki sellaiset kokonaisluvut n ja m , missä $n > m > 2$, että säännöllinen n -kulmio voidaan piirtää säännöllisen m -kulmion sisälle niin, että n -kulmion kaikki kärjet sijaitsevat m -kulmion sivuilla.