

36. pohjoismainen matematiikkakilpailu

4. huhtikuuta 2022

Kilpailu kestää 4 tuntia. Kukin tehtävä on 7 pisteen arvoinen.

Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.

1. Määritä kaikki sellaiset kuvaukset $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, että jokaisella reaaliluvulla x pätee

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x) \quad \text{ja} \quad f(f(x)) = 1 - f(x).$$

2. Ihmemaassa kaupunkien välillä on teitä, ja aina kun kahden kaupungin välillä on suora tie, niin niiden välillä on myös toisista teistä koostuva reitti. (Kahden kaupungin välillä on korkeintaan yksi suora tie.) Herttakuningatar määräsi Padat tuottamaan listan kaikista “parillisista” tiestön alijärjestelmistä, ts. järjestelmistä, jotka muodostuvat teiden joukon osajoukosta, jossa jokaisesta kaupungista lähtee parillinen määrä (mahdollisesti nolla) tietä. Jokaista tällaista alijärjestelmää kohti heidän pitäisi listata sen tiet. Jos Ihmemaassa on kaikkiaan n tietä ja Patojen listassa x alijärjestelmää, niin mikä on teiden lukumäärä listassa, kun kukin tie lasketaan mukaan niin monta kertaa, kuin se esiintyy listassa?
3. Anton ja Britta pelaavat peliä joukolla $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, missä $n \geq 5$ on pariton kokonaisluku. Jokaisella kierroksella Anton poistaa joukosta M luvun ja lisää sen joukkoonsa A , ja sitten Britta poistaa myös luvun joukosta M , mutta lisää sen joukkoon B (molemmat joukot A ja B ovat aluksi tyhjiä). Kun M on tyhjentynyt, Anton valitsee joukosta A kaksi eri lukua x_1 ja x_2 sekä näyttää ne Britalle. Sen jälkeen Britta valitsee joukosta B kaksi eri lukua y_1 ja y_2 . Britta voittaa, jos

$$(x_1 x_2 (x_1 - y_1) (x_2 - y_2))^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{n},$$

muuten Anton voittaa. Määritä kaikki luvut n , joilla Britalla on voittostrategia.

4. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, k sen ympärysympyrä ja O ympärysympyrän keskipiste. Pisteiden O kautta kulkeva suora leikkaa sivut AB ja AC vastaavasti pisteissä D ja E . Olkoot B' ja C' pisteiden B ja C vastaavat peilikuvat pisteen O suhteen. Todista, että ODC' :n ja OEB' :n ympärysympyrät kohtaavat k :lla.