Epäeuklidisista geometrioista

Euklidisen ja epäeuklidisen geometrian erottava tekijä on yhdensuuntaisuusaksiooma. Sen aksiooma-asemaa kritisoitiin jo antiikin aikana: sen arveltiin olevan todistettavissa oleva lause. Lukuisat Eukleideen kommentaattorit ja editoijat esittivät sille todistuksia, jotka tarkemmassa analyysissä aina osoittautuivat luonteeltaan sellaisiksi, että oletusten joukkoon oli lisätty jokin muu, yleensä paralleeliaksiooman kanssa yhtäpitävä olettamus. Tällaisia olivat esimerkiksi se, että yhdensuuntaiset suorat ovat kaikkialla yhtä etäällä toisistaan, että annetusta suorasta vakioetäisyydellä olevat pisteet muodostavat suoran, että nelikulmiossa $ABCD$, jossa $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ ovat suoria kulmia ja $AC \cong BD$, myös $\angle BDC$ ja $\angle CAD$ ovat suoria tai että kulman aukeamassa olevan pisteen kautta kulkeva suora leikkaa kulman kyljet.

Paralleeliaksiooman varsinainen selvittely tapahtui historiallisesti kolmessa vaiheessa. 1700-luvulla tehtiin merkittäviä tutkimuksia siitä, mitä seurauksia johtuisi paralleeliaksiooman poistamisesta. Näiden tutkimusten tavoite oli todistaa paralleeliaksiooma epäsuorasti. 1800-luvun alussa saksalainen Gauss, unkarilainen Bolyai ja venäläinen Lobatševski johtuivat toisistaan riippumatta ajatukseen geometriasta, jossa paralleeliaksiooman korvaisi jokin muu olettamus. He todistivat tällaisen geometrian perusteoreemoja. Samoihin aikoihin kehittynyt *projektiivinen tasogeometria* on järjestelmä, jossa ei ole toisiaan leikkaamattomia suoria. 1800-luvun puolen välin jälkeen esitettiin useita konkreettisia malleja erilaisista epäeuklidista geometrioista.

Nimitystä *epäeuklidinen geometria* voidaan käyttää yleensä geometriasta, jossa jotkin euklidisen geometrian olettamukset on muutettu toisiksi, tai nimenomaan sellaisesta geometriasta, jossa paralleeliaksiooma on korvattu jollain muulla oletuksella. Järjestelmää, josta paralleeliaksiooma puuttuu, mutta joka muuten on euklidinen, kutsutaan *neutraaligeometriaksi*.

Seuraavassa käytetään ajoittain symbolia R suoralle kulmalle tai sen suuruudelle.

Paraalleeliaksioomatonta geometriaa

Euklidisen geometrian järjestelmässä pätee paralleeliaksioomasta riippumatta

Lause 1. *Suoran a ulkopuolella olevan pisteen P kautta voidaan piirtää ainakin yksi suora, joka ei leikkaa a:ta.*

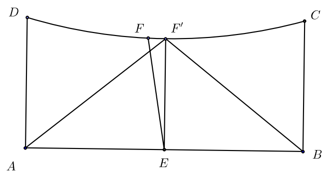
Todistus. Piirretään P:n kautta suora b, joka leikkaa a:n pisteessä B. Piirretään P:n kautta suora c, joka muodostaa b:n kanssa saman kulman kuin a. Jos a ja c leikkaisivat pisteessä C, niin kolmiossa PBC olisi kulma $\angle PBC$, joka olisi yhtä suuri kuin kolmion kärjessä P olevan kulman vieruskulma. Ristiriita!

(Voi huomata, että lause ei päde geometriassa, jossa ”taso” on pallon pinta ja ”suoria” ovat pallon isoympyrät. Tällainen geometria poikkeaa euklidisesta myös muuten kuin siinä, että suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta ei voi asettaa yhtään suoraa leikkaamatonta suoraa.)

Yritämme nyt toimia paralleeliaksioomattomassa mutta muuten euklidisen geometrian kaltaisessa neutraaligeometriassa. Sen keskeinen työkalu on *Saccherin*[1] *nelikulmio* $ABCD$. Siinä kulmat $\angle DAB$ ja $\angle ABC$ ovat suoria ja $AD \cong BC$. Ilman paralleeliaksioomaa emme tiedä, että nelikulmio on suorakaide eli sitä, että sen kaikki kulmat olisivat suoria. Sen sijaan voidaan todistaa

Lause 2. *Saccherin nelikulmiossa on* $\angle ADC \cong \angle BCD$. *Olkoot* E *ja* F *sivujen* AB *ja* CD *keskipisteet. Silloin* $AB \perp EF \perp CD$.

Todistus. Piirretään E:n kautta AB:tä vastaan kohtisuora, joka leikkaa CD:n pisteessä F'. Kolmiot AEF' ja BEF' ovat yhtenevät (sks). Siis $\angle F'AE \cong \angle F'BE$ ja $AF' = BF'$. Edelleen $\angle DAF' \cong \angle CBF'$, mistä seuraa kolmioiden $AF'D$ ja $BF'E$ yhtenevyys (sks). Tästä seuraa $\angle ADC \cong \angle BCD$ ja $DF' = F'C$ ja $F' = F$. Myöskin $\angle DFE = \angle DFA + \angle AFE \cong \angle EFB + \angle BFC = \angle CFE$. Siis $\angle DFE$ on suora kulma.



Saccherin nelikulmion yhtä suuret kulmat $\angle CDA$ ja $\angle DCB$ voivat olla teräviä, suoria tai tylppiä. Tämän mukaisesti puhutaan *tylpän*, *suoran* ja *terävän kulman hypoteesista*.

Sanomme, että EF on Saccherin nelikulmion $ABCD$ *keskijana*. Sanomme myös Saccherin nelikulmion kulmia $\angle ADC$ ja $\angle BCD$ sen *yläkulmiksi*.

Lause 3. *Olkoon* $ABCD$ *nelikulmio jossa* $\angle DAB$ *ja* $\angle ABC$ *ovat suoria. Silloin* $\angle ADC > \angle BCD$, *jos ja vain jos* $AD < BC$.

Todistus. Oletetaan, että $AD < BC$. Olkoon E se janan BC piste, jolle $BE = AD$. Edellisen lauseen nojalla $\angle ADE \cong \angle BED$. Kolmiosta DCE saadaan $\angle ECD < \angle BED$. Mutta $\angle ADC > \angle ADE$. Jos $AD = BC$, on edellisen lauseen nojalla $\angle ADC \cong \angle BCD$. Jos $AD > BC$, voidaan päätellä kuten todistuksen alkuosassa, ja saataisiin $\angle ADC < \angle BCD$. Näin myös lauseen "vain jos" -osa on todistettu.

Lause 4. *Olkoon* $ABCD$ *Saccherin nelikulmio ja olkoot* P *ja* Q *sivujen* AB *ja* CD *pisteitä niin, että* $PQ \perp AB$. *Olkoon* $\alpha = \angle ADC$. *Jos* $PQ < BC$, *niin* α *on terävä, jos* $PQ = BC$, *niin* α *on suora ja jos* $PQ > BC$, *niin* α *on tylppä.*

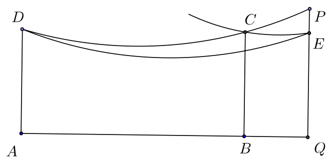
Todistus. Olkoon $\beta = \angle DQP$ ja $\gamma = \angle PQC$. Lauseesta 3 seuraa, että jos $PQ < BC$, niin $\alpha < \beta$ (nelikulmio $AQPD$) ja $\alpha < \gamma$ (nelikulmio $QBCP$). Vieruskulmien β ja γ summa on kaksi suoraa kulmaa. Koska $2\alpha < \beta + \gamma$, α on terävä. Muut tapaukset todistetaan analogisesti.

Edellisen lauseen implikaatiot muodostavat ketjun, jonka perusteella ne ovat itse asiassa ekvivalensseja.

Lause 5. *Olkoon* $ABCD$ *on Saccherin nelikulmio,* $\alpha = \angle ADC$, P *piste suoralla* CD *janan* CD *ulkopuolella ja* Q *sellainen suoran* AB *piste, että* $PQ \perp AB$. *Jos* $PQ > BC$, *niin* α *on terävä, jos* $PQ = BC$, *niin* α *on suora ja jos* $PQ < BC$, *niin* α *on tylppä.*

[1] Italialaisen jesuiitan *Giovanni Saccherin* (1667–1733) yritykset todistaa paralleeliaksiooma tuottivat monia tärkeitä neutraaligeometrian tuloksia.

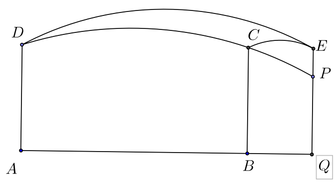
Todistus. Oletetaan, että C on janalla PD. Oletetaan, että $PQ > BC$. Olkoon E janalla QP niin, että $QE = BC$. Silloin $AQED$ ja $BQEC$ ovat Saccherin nelikulmioita. Olkoon $\beta = \angle ADE \cong \angle QED$ ja $\gamma = \angle BCE \cong \angle QEC$. Silloin $\beta < \alpha$ ja $\beta < \gamma$. Lisäksi kolmiosta CDE nähdään $\angle PCE = \delta > \angle CDE = \alpha - \beta$. Kulmien $\angle BCD = \alpha$, $\angle BCE = \gamma$ ja $ECP = \delta$ summa on kaksi suoraa kulmaa. Mutta $\alpha + \gamma + \delta > \alpha + \gamma + \alpha - \beta > 2\alpha$. Jos $PQ = BC$, Saccherin nelikulmioista $ABCD$, $AQPD$ ja $BQPC$ saadaan



$$\angle BCD \cong \angle CDA \cong \angle QPC \cong \angle PCB.$$

Kulma $\angle BCD$ on vieruskulmansa kanssa yhtenevä ja siis suora.

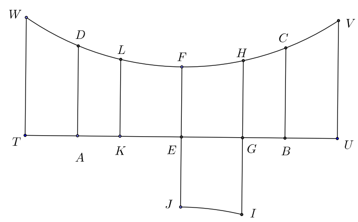
Jos $PQ < BC$, erotetaan puolisuoralta QP jana $QE = BC$. Olkoon taas $\angle ADE \cong \angle QED = \beta$, $\angle QEC \cong \angle BCE = \gamma$ ja $\angle PCE = \delta$. Selvästi $\gamma < \beta$. Kolmiosta CED saadaan $\delta > \angle EDC = \beta - \alpha$. Kulmien $\angle BCD = \alpha$ ja $\angle ECB = \gamma$ summan ja δ:n erotus on kaksi suoraa kulmaa. Mutta $\alpha + \gamma - \delta < \alpha + \gamma - \beta + \alpha < 2\alpha$.



Tämänkin lauseen implikaatiot muodostavat ketjun, jonka perusteella ne ovat itse asiassa ekvivalensseja.

Lause 6. *Jos jokin Saccherin nelikulmio toteuttaa terävän kulman hypoteesin, kaikki Saccherin nelikulmiot toteuttavat sen. Jos jokin Saccherin nelikulmio toteuttaa suoran kulman hypoteesin, kaikki Saccherin nelikulmiot toteuttavat sen. Jos jokin Saccherin nelikulmio toteuttaa tylpän kulman hypoteesin, kaikki Saccherin nelikulmiot toteuttavat sen.*

Todistus. Todistetaan lauseen terävän kulman hypoteesia koskeva osa. Tarkastetaan ensin kahta sellaista Saccherin nelikulmiota, joilla on sama keskijana. Voidaan olettaa, että $ABCD$ ja $TUVW$ ovat Saccherin nelikulmioita, A, T, B ja U ovat samalla suoralla ja molempien nelikulmioiden keskijana on EF, E suoralla AB. Koska $EF \perp CD$ ja $EF \perp VW$, pisteet C, V, D ja W ovat samalla suoralla. Olkoon vielä $AB < TU$. Oletetaan, että $ABCD$ toteuttaa terävän kulman hypoteesin, ts. että $\angle BCD$ on terävä. Lauseen 5 (tai sen jälkeen tehdyn huomautuksen) mukaan $UV > BC$. Lauseesta 4 seuraa nyt, että $\angle UVW$ on terävä. Jos $TU < AB$, sama päättely toimii käänteisessä järjestyksessä.

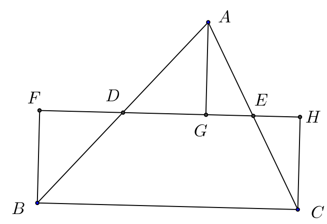


Osoitetaan sitten, että jokaista muutakin janaa kohden löytyy teräväkulmainen Saccherin nelikulmio, jonka keskijana on kyseinen jana. Olkoon EG mielivaltainen jana puolisuoralla EB. Piirretään G:n kautta AB:tä vastaan kohtisuora, joka leikkaa CD:n pisteessä H.

Olkoot K ja L H:n ja G:n peilikuvat peilauksessa yli EF:n. Lauseen alkuosan todistuksen perusteella $KGHL$ (jonka keskijana on EF) on teräväkulmainen Saccherin nelikulmio. Peilataan F ja H yli EG:n pisteiksi I ja J. Koska $\angle EFH$ on suora (lause 2), $FJIH$ on Saccherin nelikulmio ja $\angle FHG$ on jo todettu teräväksi. Jo todistetun mukaan kaikki Saccherin nelikulmiot, joiden keskijana on EG, toteuttavat terävän kulman hypoteesin.

Lause 7. *Jokaista kolmiota ABC kohden on olemassa Saccherin nelikulmio, jonka yläkulmien summa on sama kuin kolmion ABC kulmien summa.*

Todistus. Olkoot D ja E AB:n ja AC:n keskipisteet. Olkoot F, G ja H pisteiden B, A ja C kohtisuorat projektiot suoralla DE. Oletetaan, että G on janalla DE. Kolmiot ADG ja BDF ovat yhtenevät (kks), samoin kolmiot AEG ja CEH. Siis $BF = AG = HC$. Siis $HFBC$ on Saccherin nelikulmio. Mutta koska $\angle FBD \cong \angle GAD$ ja $\angle GAE \cong \angle ECH$, on $\angle FBC + \angle HCB$ sama kuin kolmion ABC kulmien summa. Tapauksessa, jossa G on janan DE ulkopuolella, päättely on periaatteessa sama, mutta kulmien summan sijasta on tarkasteltava erotusta.



Lause 8. *Jos on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa, kaikkien kolmioiden kulmien summa on pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa. Jos on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa, kaikkien kolmioiden kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa. Jos on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on yli kaksi suoraa kulmaa, kaikkien kolmioiden kulmien summa on yli kaksi suoraa kulmaa.*

Todistus. Oletetaan, että jonkin kolmion kulmien summa on pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa. Lauseen 7 perusteella on olemassa Saccherin nelikulmio, jonka yläkulmien summa on alle kaksi suoraa kulmaa. Silloin jokainen Saccherin nelikulmio toteuttaa terävän kulman hypoteesin. Lauseen 7 nojalla jokaisen kolmion kulmasumman on oltava alle kaksi suoraa kulmaa. Lauseen muut väittämät todistetaan samoin.

Edellinen kolmion kulmasumman puolittaista invarianssia koskeva lause jaottelee geometrioita *hyperbolisiin*, *euklidisiin* ja *elliptisiin*. Hyperbolisissa geometrioissa suoraan a ja sen ulkopuoliseen pisteeseen P liittyy kaksi P:stä lähtevää puolisuoraa, PP_1 ja PP_2, jotka eivät leikkaa a:ta, mutta jotka ovat sellaisia, että jokainen P:stä alkava kulman P_1PP_2 aukeamassa kulkeva puolisäde leikkaa a:n.

Muutama tehtävä:

1. *Kolmion ABC kulmavaje $\delta(ABC)$ on luku $180°-$ kolmion kulmasumma. Olkoon D sivun BC piste. Osoita, että $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(ADC)$.*

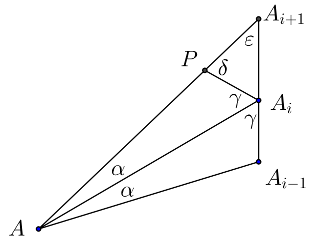
2. *Osoita, että hyperbolisessa ja elliptisessä geometriassa kaksi kolmiota, joilla on samat kulmat, ovat yhteneviä. Opastus: käytä hyväksi edellisen tehtävän tulosta.*

3. *Olkoon $ABCD$ nelikulmio, jossa kulmat $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle D$ ovat suoria. Osoita, että kulma $\angle C$ on terävä, suora tai tylppä sen mukaan, vallitseeko geometriassa terävän, suoran vai tylpän kulman hypoteesi. Opastus: peilaa suorasssa AD.*

Edellä saatua tietoa voidaan täydentää, kun otetaan huomioon *Arkhimedeen aksiooma*. Se on riippumaton paralleeliaksioomasta ja muista geometrian perusolettamuksista, mutta yleensä sen ajatellaan kuuluvan geometrian perusolettamuksiin. Aksiooma sanoo, että jos AB ja CD ovat janoja, niin asettamalla tarpeeksi monta AB-janaa peräkkäin saadaan jana, joka on pitempi kuin CD. (On mahdollista rakentaa geometrioita, joissa tämä ei päde.)

Arkhimedeen aksioomasta seuraa, että jos α ja β ovat kaksi kulmaa, niin on olemassa n siten, että $n\alpha > \beta$. Koska kulma voidaan aina puolittaa, riittää, että todistetaan tämä kulmille, jotka ovat suoraa kulmaa pienempiä.

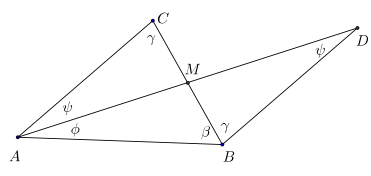
Olkoon $\angle CAB = \beta$ ja $CB \perp AB$. Sijoitetaan α-kulmia niin, että ensimmäisen toinen kylki on AB ja toinen kylki leikkaa BC:n pisteessä A_1, seuraavan toinen kylki on AA_1 ja toinen leikkaa BC:n pisteessä A_2 jne. Osoitetaan, että $BA_1 < A_1A_2 < \ldots$. Tarkastetaan kahta vierekkäistä α-kulmaa $A_{i-1}AA_i$ ja A_iAA_{i+1}. Olkoon P janalla AA_{i+1} niin, että $\angle AA_iP = \angle AA_iA_{i-1} = \gamma$. Kolmiot $AA_{i-1}A_i$ ja APA_i ovat yhteneviä (ksk). Siis $A_iP = A_iA_{i-1}$. Toisaalta kolmiosta AA_iP saadaan $\angle A_{i+1}PA_i = \delta < \gamma$ ja kolmiosta AA_iA_{i+1} $\angle AA_{i+1}A_i = \varepsilon < \gamma$. Siis $\varepsilon < \delta$. joten $A_iA_{i+1} > A_iP = A_iA_{i-1}$



Arkhimedeen aksioomasta seuraa nyt, että jollakin n $BA_n > n\cdot AA_1 > BC$ (tai $n\cdot\angle BAA_1$ on suoraa kulmaa suurempi). Joka tapauksessa Arkhimedeen aksioomaa vastaava tulos pätee kulmille. Se voidaan muotoilla niin, että jos α ja β ovat kaksi kulmaa, on olemassa n siten, että $\dfrac{1}{n}\alpha < \beta$.

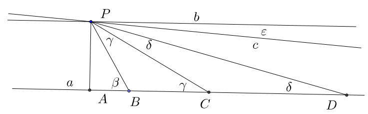
Osoitetaan nyt, että Arkhimedeen aksioomalla lisätyssä neutraaligeometriassa voi olla vain kolmioita, joiden kulmasumma on enintään kaksi suoraa kulmaa. Tämä perustuu sille havainnolle, että jokaista kolmiota kohden löytyy toinen kolmio, jolla on sama kulmasumma, mutta jonka yksi kulma on enintään puolet jostakin alkuperäisen kolmion kulmasta.

Olkoon ε jokin kulma. Olkoon ABC kolmio, M sivun BC keskipiste ja D sellainen piste AM:n jatkeella, että $MA = MD$. Silloin $AMC \cong DMB$ (sks), joten $\angle MDB = \angle MAC = \psi$ ja $\angle DBM = \angle ACM = \gamma$. Olkoon vielä $\angle ABC = \beta$. Jos $\angle MAB = \phi$, niin kolmion ABC kulmien summa on $\phi+\psi+\beta+\gamma$ ja kolmion ABD myös $\phi+\beta+\gamma+\psi$. Koska $\phi+\psi = \angle CAB$, kolmion ABD yksi kulma on enintään puolet kulmasta $\angle CAB$. Samaa menettelyä voidaan soveltaa kolmioon ABD jne., kunnes tullaan tilanteeseen, jossa on kolmio, jossa yksi kulma on pienempi kuin ε.



Jos nyt kolmion ABC kulmien summa ylittää kaksi suoraa kulmaa, se on $2R+\varepsilon$ jollain kulmalla ε. Silloin on olemassa kolmio, jonka yksi kulma on $< \varepsilon$, mutta jonka kulmien summa on sama kuin kolmion ABC. Tässä kolmiossa on kaksi kulmaa, α ja β, joiden summa on $> 2R$. Mutta jos näiden kulmien vieruskulmat ovat α' ja β', niin $\alpha' > \beta$ ja $\beta' > \alpha$. Siis $4R = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') > 4R$. Ristiriita osoittaa, että kolmiota ABC, jossa kulmasumma ylittäisi kaksi suoraa kulmaa, ei ole olemassa.

Osoitetaan vielä, että "kolmion kulmien summa on aina kaksi suoraa kulmaa" on yhtäpitävä väite paralleeliaksiooman kanssa. Tunnetusti paralleeliaksioomasta seuraa, että kolmion kulmien summa on $2R$. Opsoitetaan, että jos paralleeliaksiooma ei ole voimassa, on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on $< 2R$. (Silloin kaikkien kolmioiden kulmasumma on $< 2R$.)



Oletetaan, että suoran a ulkopuolisen pisteen P kautta voidaan piirtää useampia kuin yksi a:n suuntainen suora. Olkoon $A \in a$ sellainen, että $PA \perp a$. Piirretään P:n kautta AP:tä vastaan kohtisuora suora b. Silloin $b \| a$. Olkoon sitten $c \neq b$ toinen P:n kautta kulkeva a:ta leikkaamatosn suora. Olkoon ε suorien b ja c välinen kulma. Olkoon sitten $B \neq A$ jokin suoran a piste samalla puolen suoraa AP kuin millä c kulkee a:n ja b:n välissä ja $\angle PBA = \beta$. Olkoon C sellainen a:n piste, että $BC = PB$. Kolmiossa PBC on silloin kaksi yhtä suurta kulmaa γ, ja koska PBC:n kulmien summa on enintään $2R$, on $\beta \geq 2\gamma$. Samaa prosessia jatkaen voidaan tulla kolmioon PXY, jossa $\angle PYX < 2^{-n}\beta < \varepsilon$. Mutta kolmiossa PAY on $\angle APY < R - \varepsilon$, joten kolmion kulmasumma on $R + (R - \varepsilon) + \angle PYX < 2R$.

Poincarén malli

Inversiokuvaus tekee mahdolliseksi rakentaa melko yksinkertaisesti eräs tavallisimmista epäeuklidisen geometrian malleista. Se on peräisin *Henri Poincarélta*[1] (ja esitetään usein kompleksianalyysin koneiston avulla). Koska inversio ominaisuuksineen on euklidisen geometrian objekti, malli on itse asiassa eräänlainen euklidisen geometrian uusi tulkinta. Tämä malli vaatii pohjakseen euklidisen geometrian.

Palautetaan mieliin *inversiokuvaus*. Jos Γ on O-keskinen r-säteinen ympyrä ja $P \neq O$, niin P:n *inversiopiste* on se puolisuoran OP piste P', jolle $OP \cdot OP' = r^2$. Inversiossa Γ:n pisteet pysyvät paikallaan, Γ:n sisä- ja ulkopuoli vaihtavat paikkaa, jokainen O:n kautta kulkeva ympyrä kuvautuu suoraksi, joka on kohtisuorassa ympyrän O:sta piirrettyä halkaisijaa vastaan ja jokainen ei O:n kautta kulkeva ympyrä kuvautuu ympyräksi, joka ei kulje O:n kautta. Inversiokuvaus on tason, josta O on poistettu, bijektio itselleen. SeSe on *(anti)konforminen*: se säilyttää kulmat, mutta kääntää sunnistuksen. Ympyrä, joka leikkaa Γ:n kohtisuorasti, kuvautuu inversiossa itselleen.

Neljän pisteen A, B, C ja D *kaksoissuhde* on

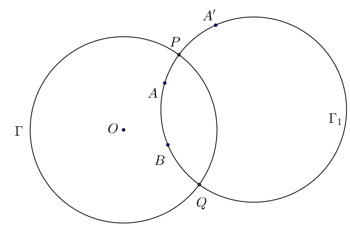
$$[A,\, B,\, C,\, D] = \frac{\dfrac{AC}{AD}}{\dfrac{BC}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

[1] *Henri Poincaré* (1854–1912), ranskalainen matemaatikko, aikakautensa merkittävimpiä.

Jos A' jne. ovat pisteiden A jne. kuvat inversiossa, niin $[A', B', C', D'] = [A, B, C, D]$.

Poincarén mallin taso, P-taso Π on O-keskisen (ja r-säteisen) ympyrän Γ sisäpuoli. (Liitämme mallin piiriin kuuluviin käsitteisiin P-kirjaimen erottamaan niitä myös tarvittavista tavallisen euklidisen geometrian vastaavista käsitteistä.) P-tason pisteet, P-pisteet, ovat Π:n pisteet. Tason suorat, P-suorat, ovat Π:hin kuuluvat osat Γ:aa vastaan kohtisuorista ympyröistä ja O:n kautta kulkevista suorista (jotka myös leikkaavat Γ:n kohtisuorasti). Kun seuraavassa puhutaan inversioista, tarkoitetaan, ellei muuta sanota, inversiota ympyrässä Γ. P-suoraa γ määrittävä ympyrä Γ_1 on γ:n *kantaja*.

Selvitellään, miten hyvin P-suorat vastaavat geometrian käsitystä suorasta. Ensimmäinen kysymys on suoran yksikäsitteisyys: kahden P-pisteen kautta tulisi kulkea yksi ja vain yksi P-suora.



Olkoot A ja B kaksi P-pistettä. Jos A, B ja O ovat samalla suoralla, P-suora AB on tämän suoran Π:n sisäpuolelle jäävä osa. Tällaisia suoria on vain yksi. Jos A, B ja O eivät ole samalla suoralla, niin D olkoon A:n inversiokuva. Pisteiden A, B ja D kautta kulkee yksi ja vain yksi ympyrä Γ_1. Selvästi tämä ympyrä kuvautuu inversiossa itselleen. Koska inversio säilyttää kulmat, Γ ja Γ_1 leikkaavat toisensa kohtisuorasti. Γ_1:n Π:ssä oleva osa on siis pisteiden A ja B kautta kulkeva P-suora. Jokainen A:n ja B:n kautta kulkeva P-suora on osa Γ:aa vastaan kohtisuoraa ympyrää. Tällaisen ympyrän kuva inversiossa on ympyrä itse, siis A:n, B:n ja D:n kautta kulkeva ympyrä, joka on Γ_1. P-suora on siis yksikäsitteinen.

Muut euklidisen geometrian ns. järjestys- ja liittymisaksioomat on melko helppo todeta paikkansapitäviksi. Sen sijaan kahden janan yhtenevyys ei ole itsestään selvä, vaan se on määriteltävä. Olkoon siis AB P-jana. Silloin A ja B ovat P-suoralla, jonka kantaja leikkaa Γ:n pisteissä P ja Q. Nimetään nämä niin, että A on P:n ja B:n välissä. Jos nyt $A'B'$ on toinen P-jana ja jos $A'B'$:n kantaja leikkaa Γ:n pisteissä P' ja Q' (A' P':n ja B':n välissä), niin määritellään $AB \cong A'B'$ jos ja vain jos

$$[A, B, P, Q] = [A', B', P', Q'].$$

Näin märitelty yhtenevyys on selvästi transitiivinen relaatio, niin kuin pitääkin. Mutta miten se suhtautuu janojen "yhteenlaskuun"?

Oletetaan A, B ja C saman P-suoran pisteiksi, samoin A', B' ja C'. Lisäksi B on P-janalla AC ja B' P-janalla $A'C'$. Jos vielä $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $[A, B, P, Q] = [A', B', P', Q']$ ja $[B, C, P, Q] = [B', C', P', Q']$. Kaksoissuhdeyhtälöt merkitsevät euksilidisin mitoin yhtälöitä

$$\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} = \frac{A'P'}{A'Q'} \cdot \frac{B'Q'}{B'P'} \quad \text{ja} \quad \frac{BP}{BQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = \frac{B'P'}{B'Q'} \cdot \frac{C'Q'}{C'P'}.$$

Kun nämä yhtälöt kerrotaan puolittain, saadaan

$$\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = \frac{A'P'}{A'Q'} \cdot \frac{C'Q'}{C'P'}.$$

Siis $[A, C, P, Q] = [A', C', P', Q']$, joten P-janat AC ja $A'C'$ ovat yhteneviä.

Huomataan, että

$$[A, B, P, Q] \cdot [B, C, P, Q] = [A, C, P, Q].$$

Voidaanko P-jana siirtää toiselle P-suoralle alkamaan tietystä pisteestä? Tämän tarkastelu helpottuu, jos otetaan käyttöön Π:n kuvaus *P-peilaus*. Jos Γ_1 on ympyrä, joka leikkaa Γ:n kohtisuorasti, niin inversio Γ_1:ssä kuvaa Γ:n itselleen. Γ:n sisäpisteet pysyvät Γ:n sisäpisteinä, mutta ne siirtyvät Γ_1:n vastakkaisille puolille. Invesio Γ_1:ssä säilyttää kaikki kaksoissuhteet.

Olkoon A P-piste, P ja Q A:n kautta piirretyn OA:ta vastan kohtisuoran (euklidisen) suoran ja Γ:n leikkauspisteet ja A' OA:n ja Q:n kautta kulkevan Γ:n tangentin leikkauspiste. Kolmiot OAQ ja OQA' ovat yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, ja niistä nähdään, että A' on A: inversiokuva. Mutta kolmiot QAA' ja OQA' ovat myös suorakulmaisia kolmioita, ja nistä nähdään, että O on A:n inversiokuva A'-keskisessä P:n ja Q:n kautta kulkevassa ympyrässä Γ_1. On siis aina olemassa P-peilaus, joka vie mielivaltaisen pisteen Γ:n keskipisteeseen. Jokainen A:n kautta kulkeva P-suora kuvautuu nyt O:n kautta kulkevaksi P-suoraksi. Kahdella P-peilauksella ja niiden välissä olevalla kierrolla voidaan mielivaltainen P-jana siirtää mille tahansa P-suoralle mistä tahansa sen pisteestä alkavaksi janaksi. Samoin voidaan siirtää kulma.

Edellisistä havainnoista seuraa, että yhtenevyysaksiooma sks on voimassa. Siten kaikki tästä aksioomasta paralleeliaksioomaan turvautumatta johtuvat lauseet ovat voimassa Π:ssä.

Paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Jokaisen P-suoran AB ulkopuolisen pisteen kautta kulkevat suorat ovat ne P-suorat, joiden kantajat ovat C:n ja C':n kautta kulkevia ympyröitä. Näistä löytyy aina sellaisia, jotka eivät leikkaa AB:n kantajaa.

O-keskinen P-ympyrä on normaali euklidinen ympyrä. P-peilaus, joka vie O:n A:lle vie tämän ympyrän ympyräksi, jonka jokaiselle kahdelle pisteelle B ja C AB ja AC ovat yhteneviä. Tämä ympyrä on A-keskinen P-ympyrä. Ympyröiden leikkausaksiooma on voimassa.

Olemme todenneet, että janojen yhtenevyyden määrittelevä kaksoissuhde $[A, B, P, Q]$ on multiplikativinen. Oletetaan Γ yksikkösäteiseksi. Siirretään A O:hon P-peilauksella. Yhdistämällä kuvaukseen kierto saadaan B kuvattua pisteeseen $(b, 0)$. Nyt voidaan kaksoissuhteen $[A, B, P, Q]$ arvoksi laskea

$$\frac{1-b}{1+b}.$$

Siis $0 < [A, B, P, Q] < 1$. Tästä seuraa, että "normaali", additiivinen P-etäisyys on määriteltävissä esimerkiksi lausekkeella

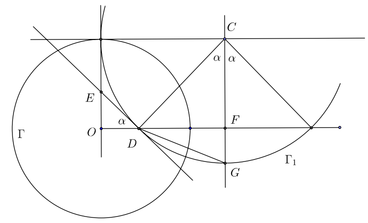
$$d(A, B) = \ln\left([A, B, P, Q]^{-1}\right) = \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right).$$

Nähdään, että etäisyys voi saada kuinka suuria arvoja hyvänsä. P-suoran päätepisteiden P ja Q voidaan ajatella olevan äärettömän kaukana. Toisaalta voidaan osoittaa, että näin määritelty etäisyys toteuttaa Arkhimedeen aksiooman.

Olkoon γ P-suora ja A γ:aan kuulumaton P-piste. A:n kautta voidaan piirtää γ:aa vastaan kohtisuora P-suora δ, joka leikkaa γ:n pisteessä B. Kuvataan γ P-peilauksella O:n kautta kulkevaksi P-suoraksi niin, että B kuvautuu O:ksi. Oletetaan Γ yksikkösäteiseksi. Mahdollisen kierron jälkeen γ:n kuva on y-akseli ja A:n kuva on piste $D = (b, 0)$, $b > 0$. P-suora δ kuvautuu siis x-akselille. Yksinkertainen lasku osoittaa, että

$$b = \frac{e^{d(A,B)} - 1}{e^{d(A,B)} + 1}.$$

Selvitetään kulma, jonka A:n kautta piirretty γ:aa leikkaamaton suora vähintään muodostaa δ:n kanssa. Se on sama kuin y-akselia pisteessä $H = (0, 1)$ sivuavan ja pisteen $(b, 0)$ kautta kulkevan ympyrän Γ_1 ja x-akselin välinen kulma $\alpha = \angle ODE$. Ympyrän Γ_1 yhtälö on $(x-c)^2 + (y-1)^2 = c^2$. Koska $(b, 0)$ toteuttaa ympyrän yhtälön, on $b^2 - 2bc + 1 = 0$. Leikatkoon C:n kautta piirretty y-akselin suuntainen suora x-akselin pisteessä $F = (c, 0)$ ja Γ_1:n pisteessä $G = (c, 1 - c)$. Koska $CD \perp DE$ ja $CG \perp OF$, $\angle DCG = \alpha$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle FDG = \dfrac{\alpha}{2}$. Saadaan



$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{FG}{FD} = \frac{c-1}{c-b}.$$

Kun tähän sijoitetaan edellä johdettu b:n ja c:n välinen yhteys, saadaan

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-b}{1+b}.$$

Kun vielä otetaan huomioon b:n lauseke, saadaan *Bolyain kaava*

$$\tan\frac{\alpha}{2} = e^{-d(A,B)}.$$

Kaikki A:n kautta kulkevat P-suorat, jotka muodostavat α:aa suuremman kulman δ:n kanssa, ovat γ:n "suuntaisia".

Vielä muutama harjoitustehtävä:

4. *Totea, että Poincarén geometriassa jokaisen kulman aukeamassa on kokonaan aukemaan sisältyviä suoria (jotka eivät leikkaa kulman kylkiä).*

5. *Osoita, että kaikilla $\alpha < 60°$ Poincarén geometriassa on tasasivuisia kolmioita, joiden kulmat ovat α:n suuruisia.*

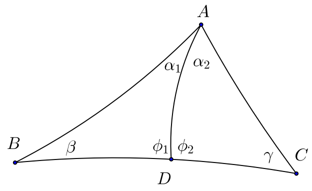
6. *Osoita, että jos $\alpha + \beta + \gamma < 180°$, niin Poincarén geometriassa on kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ.*

7. *P-suoran γ kantaja Γ_1 leikkaa Γ:n pisteissä P ja Q. Olkoon α sellainen Γ:n sisäpuolella oleva (mielivaltaisen) ympyrän kaari, jonka päätepisteet ovat P ja Q. Osoita, että α:n pisteiden P-etäisyys γ:n pisteistä on vakio.*

Harjoitusten ratkaisuja

1. Olkoot kolmion ABC kulmat α, β ja γ ja olkoon $\angle BAD = \alpha_1$, $\angle DAC = \alpha_2$, $\angle BDA = \phi_1$ ja $\angle CDA = \phi_2$. Silloin $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $\phi_1 + \phi_2 = 180^\circ$ ja

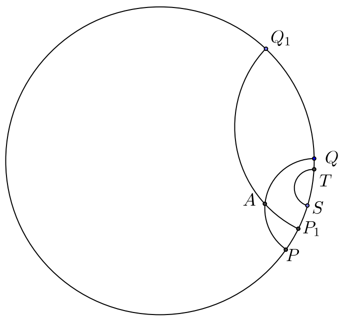
$$\begin{aligned} \delta(ABC) &= 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 180^\circ + 180^\circ - \phi_1 - \phi_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta - \gamma \\ &= 180^\circ - (\alpha_1 + \beta + \phi_1) + 180^\circ - (\alpha_2 + \phi_2 + \gamma) \\ &= \delta(ABD) + \delta(ADC). \end{aligned}$$



2. Kolmioiden yhtenevyskriteerit sks jne. eivät riipu paralleeliaksioomasta. Niinpä jos kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ yhdet vastinsivut ovat yhtä pitkät, niin kolmiot ovat yhteneviä (ksk). Oletetaan sitten, että kolmioissa kaikki vastinsivuparit olisivat eripituisia. Silloin löytyisi kaksi paria, joissa erisuuruus olisi "samaan suuntaan", esimerkiksi $AB < A'B'$ ja $AC < A'C'$. Nyt voitaisiin kulman BAC kyljiltä valita pistet B'' ja C'' niin, että B ja C olisivat janojen AB'' ja AC'' pisteitä ja kolmiot $A'B'C'$ ja $AB''C''$ olisivat yhteneviä ja kolmioilla ABC ja $AB''C''$ olisi samat kulmat ja siis myös sama kulmadefekti. Kolmio $AB''C''$ voitaisiin osittaa esimerkiksi kolmioiksi ABC, $BB''C$ ja $CB''C''$. Jos kolmioiden kulmadefekti ei ole nolla, olisi $\delta(AB''C'') = \delta(ABC) + \delta(BB''C) + \delta(CB''C'') \neq \delta(ABC)$. Kolmioiden ABC ja $A'B'C'$ sivujen on siis oltava pareittain yhtä pitkiä eli kolmioiden yhteneviä.

3. Peilaus yli suoran AD kuvaa B:n B':ksi ja C:n C':ksi. Lisäksi kulmat $\angle ADC'$ ja $\angle B'AD$ ovat suoria, joten C', D, C ja B', A, B ovat samalla suoralla. Edelleen $\angle C'B'A = \angle ABC$ eli suora kulma. Nelikulmio $B'BCC'$ on siis Saccherin nelikulmio ja tämän nelikulmion laadun määrittää $\angle BCD$. [Tehtävän nelikulmio $ABCD$ on ns. *Lambertin nelikulmio*; nimi tulee (lähinnä) sveitsiläisestä *Johann Heinrich Lambertista* (1728–77), jonka pyrkimykset todistaa paralleeliaksiooma liittyivät tällaisiin nelikulmioihin. Lambert oli ensimmäinen, jonka onnistui todistaa luku π irrationaaliseksi.]

4. P-kulman, jonka kärki on A, aukeaman muodostaa kahden P-puolisuoran väliin jäävä alue. P-puolisuoran määrittävät A ja Γ:aa vastaan kohtisuoran ympyränkaaren päätepiste. Päätepisteiden, esimerkiksi P_1 ja Q, väliin jää aina sellainen Γ:n kaari, jonka kahden pisteen, esimerkiksi T:n ja S:n, kautta voidaan asettaa Γ:aa vastaan kohtisuora ympyränkaari. Se on kokonaan kulman aukeamassa sijaitseva P-suora.



5. Kannattaa rakentaa kolmio niin, että yksi kärki on piste O. Olkoot OX ja OY sellaiset puolisuorat, että $\angle XOY = \alpha$. Valitaan OX:ltä ja OY:ltä pisteet A' ja B' niin, että $OA' = OB'$ ja asetetaan A':n ja B':n kautta suorat, jotka kumpikin muodostavat OA': ja OB':n kanssa kulman α. Näiden suorien normaalit leikkaavat toisensa symmetrian vuoksi $\angle A'OB'$:n puolittajalla pisteessä D'. D'-keskinen ja pisteiden A' ja B' kautta kulkeva ympyrä muodostaa silloin OA':n ja OB':n kanssa kulmat α. Piirretään tälle ympyrälle tangentit pisteestä O. Olkoot sivuamispisteet P' ja Q'. Homotetia, jonka keskus on O, vie P':n ja Q':n Γ:n pisteiksi P ja Q. Pisteiden A' ja B' kuvat tässä homotetiassa ovat A ja B, ja ympyrä $PABQ$ on kohtisuorassa Γ:aa vastaan (koska sen tangentit OP ja OQ ovat Γ:n halkaisijoina kohtisuorassa Γ:aa vastaan). Nyt OAB on kolmio, jonka kaikki kulmat ovat $= \alpha$. Koska paralleeliaksioomasta rippumatta tasakulmainen kolmio on tasakylkinen, OAB on tasasivuinen.

6. Menetellään periaatteessa samoin kuin edellä: piirretään kaksi Γ:n sädettä, OB' ja OC', joiden välinen kulma on α, piirretään B':n kautta suora b, joka leikkaa OB':n kulmassa β ja C':n kautta suora c, joka leikkaa OC':n kulmassa γ. Piirretään ympyrä Γ_1 B':n kautta niin, että b on sen tangentti. Piirretään tälle ympyrälle c:n suuntainen tangentti. Olkoon sivuamispiste X. Tehdään homotetiakuvaus, jonka keskus on B' ja joka vie pisteen X OC':lle pisteeseen C''. Γ_1:n kuva Γ_2 tässä kuvauksessa on ympyrä, joka leikkaa OB':n ja OC':n halutuissa kulmissa β ja γ. Tämä ympyrä voidaan samoin kuin edellisen tehtävän ratkaisussa kuvata O-keskisellä homotetialla Γ:n kohtisuorasti leikkaavaksi ympyräksi. Pisteiden B' ja C'' kuvat B ja C muodostavat nyt sellaisen P-kolmion OBC, jonka kulmat ovat α, β ja γ.

7. Sopivilla inversioilla saadaan aikaan, että γ:n kantaja on ympyrän Γ halkaisija AB ja α on jokin A:n ja B:n kautta kulkeva ympyrän kaari. Olkoon C jokin AB:n piste. C:n kautta kulkee P-suora β, joka leikkaa α:n pisteessä D. Inversio, joka siirtää C:n O:hon ja kuvaa Γ:n itselleen vie β:n AB:tä vastaan kohtisuoralle halkaisijalle EF. Se vie α:n A:n ja B:n kautta kulkevaksi ympyränkaareksi ja säilyttää α:n ja AB:n välisen kulman. α kuvautuu siis itselleen ja D EF:n ja α:n leikkauspisteeseen D'. Nyt α ja EF leikkaavat kohtisuorasti. Mutta tämä merkitsee, että CD ja α ovat myös kohtisuorasa toisiaan vastaan ja CD on γ:n ja α:n lyhin P-etäisyys. Tämä etäisyys on C:stä riippumatta sama kuin O:n ja D':n P-etäisyys.