KILPAILUMATEMATIIKAN OPAS

MATTI LEHTINEN

SUOMEN MATEMAATTINEN YHDISTYS
VALMENNUSJAOSTO
Helsinki 2013

Kirjaa voi tilata Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaostolta, c/o Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu, tai sähköpostitse osoitteesta `matti.lehtinen@spangar.fi`.

ISBN 978-951-96753-1-2 (nid.)
ISBN 978-951-96753-2-9 (PDF)

Sisällys

1 Aluksi

1.1 Matematiikka voi olla kilpailulaji

Matematiikassakin kilpaillaan. Kaikkialla maailmassa pidetään erilaisia matematiikan koululaiskilpailusarjoja, jotka johtavat kansainvälisiin kilpailuihin ja lopulta jokavuotisiin *Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin.* Matematiikkakilpailujen olemassaoloa perustellaan sanomalla, että niiden avulla saadaan selville matemaattisesti lahjakkaat nuoret, että ne innostavat nuoria (hyödyllisen) matematiikan pariin ja että ne niin kuin kilpailut yleensäkin lisäävät yleistä mielenkiintoa monen etäiseksi ja turhaksikin kokemaa matematiikkaa kohtaan.

Merkittävin syy matematiikkakilpailujen järjestämiseen lienee kuitenkin se, että monet meistä mielellään menestyvät kilpailussa ja että menestyminen lähes poikkeuksetta edellyttää valmistautumista ja työntekoa. (Sivumennen on tässä heti syytä todeta, että matematiikkakilpailuihin harvoin liittyy taloudellisesti merkittävää palkitsemista tai suoraa lupausta ammattiurasta.) Kilpailuihin valmistautumisen ansiosta joka vuosi tuhannet nuoret tulevat kohtaamaan ainakin jonkin reunan oikeasta matematiikasta, matematiikasta, joka on melko lailla muuta kuin se, mitä matematiikaksi uskoo pelkän normaalin koulunkäynnin perusteella. Kilpailumatematiikka on myös oiva silta korkeakoulutason matematiikan opintoihin: vaikka sisällöt eivät ole samoja, kilpailuja yliopistomatematiikan asenne matematiikkaan on samansuuntaista. Kumpikaan ei ole laskentoa, vaan tiedon johdonmukaista rakentamista jo olemassa olevan tiedon päälle. Ei ole yllättävää, että suuri osa matematiikan koululaiskilpailuissa menestyneistä löytää elämäntehtävänsä matematiikasta tai sen liepeiltä.

Matematiikkakilpailut eivät ole tietokilpailuja. Kilpailutehtävät ovat ongelmia, ja pyrkimys on palkita ajattelua: ongelman ymmärtämistä ja ratkaisun löytämistä. Ajattelu ei kuitenkaan onnistu tyhjiössä, ilman tietoja ja työkaluja. Matematiikassakin voi järjestää kilpailuja vain, jos osallistujilla on jonkintasoinen matematiikan tietovarasto.

Tämä kirjanen esittelee koululaiskilpailujen matemaattista tietopohjaa suunnilleen siinä laajuudessa, kuin sitä tarvitaan niissä kansainvälisissä lukiotason matematiikkakilpailuissa, joihin Suomi osallistuu. Kyseessä ei ole kaiken kilpailuissa esiintyvän matematiikan kattava oppi- ja käsikirja. Tarkoitus on auttaa lukijaa ylittämään koulu- ja kilpailumatematiikan väliin nouseva, paikoin aika korkea kynnys. Mestaritasolle kohoaminen vaatii pitkäjänteistä harjoittelua, tehtävien ratkaisemista ja uuden opiskelua.

1.2 Tästä kirjasesta

Tämän esitys pyrkii rakentumaan peruskoulun yläasteen ja lukion perusmatematiikan pohjalle. Vaikka kysymyksessä ei ole varsinainen matematiikan oppikirja, asiat pyritään mahdollisuuksien mukaan perustelemaan kunnolla. Toki käytettävissä oleva tila on pakottanut tässä suhteessa moniin kompromisseihin. Tarkoitus on joka tapauksessa harjoittaa lukijaa matematiikkakilpailuissa olennaisen tärkeään perustelemisen ja todistamisen taitoon. Esitystyyli on aika lailla toisenlaista kuin lukion ja peruskoulun oppikirjoissa: se on tiivistä ja san seuraaminen vaatii lukijalta keskittymistä ja omaa työtä.

Suurin osa esitettävistä asioista on muotoiltu numeroiduiksi ja kursivoiduiksi tehtäviksi. Monet näistä teoriaa eteenpäin kuljettavista tai sitä kuvittavista tehtävistä on ratkaistu tekstissä. Osa on jätetty lukijan omatoimisesti ratkaistaviksi harjoitustehtäviksi. Tällaiset tehtävät on merkitty $*$:llä, ja niiden ratkaisut tai ratkaisuviitteet on esitetty kirjan lopussa.

Useimpien jaksojen lopussa on harjoitustehtäviä. Ne ovat melkein kaikki todellisia kilpailuissa esiintyneitä tehtäviä, ajallisesti ja maantieteellisesti vaihtelevista lähteistä mukaan poimittuja. Tehtävän yhteydessä esitettävä lähdeviite kertoo, mitä kautta tehtävä on päätynyt tähän esitykseen; sama tehtävä on silti voinut esiintyä muissakin kilpailuissa. Näiden tehtävien vaikeustaso – niin kuin kilpailujenkin – vaihtelee, mutta ne yritetty asetella summittaiseen vaikeusjärjestykseen. On selvää, että lukija saa täyden hyödyn tehtävistä vain, jos todella yrittää ne itse ratkaista. Tämä kirjanen ei kuitenkaan ole tehtäväkokoelma: hyvän ratkaisutaidon kehittäminen vaatii kyllä useamman tehtävän ratkaisemista.

Yksi keskeinen kilpailumatematiikan antama oppi on se, että tehtävät ovat vaikeita, mutteivät mahdottomia, ja että se menestyy, joka ei lannistu ensimmäisestä vastoinkäymisestä. Monet tässä kirjasessa esitetyt kilpailutehtävät saattavat toki olla vähemmän kokeneelle ratkaisijalle varsin haastavia, joten vastausosastoon turvautuminen on ihan sallittua. On myös pidettävä mielessä se, että moni tehtävä voidaan ratkaista eri tavoin, eivätkä tässä esityksessä annetut ratkaisut useinkaan ole ainoita tai edes parhaita mahdollisia.

* * *

Tämän kirjan kirjoittaminen, julkaiseminen ja jakelu on tullut mahdolliseksi Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön tuen ja Suomen Tietokirjailijat ry:n myöntämän apurahan ansiosta. Kirjan aineistoa on eri tavoin ollut esillä jo 40 vuotta jatkuneessa Suomen matematiikkaolympiajoukkueiden valmennuksessa ja vuodesta 1995 jatkuneessa Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaoston valmennustoiminnassa. Kirjoittaja on vuosien mittaan saanut

monenlaista tukea ja virikkeitä valmentajakollegoiltaan. Varteenotettavia ja -otettuja parannusehdotuksia tämän kirjan tekstiin ovat esittäneet Kerkko Luosto ja Esa Vesalainen. Heille kiitokset!

1.3 Muutama termi ja merkintätapa

Tässä kirjassa ja siinä esitettävissä tehtävissä saatetaan käyttää joitakin nimityksiä ja merkintöjä, jotka eivät ole kaikille koulumatematiikasta tuttuja. Ne on pyritty selittämään silloin, kun ne tulevat esille. Tässä kuitenkin kootusti muutama erilaisissa yhteyksissä vastaan tuleva.

Jonon *permutaatiolla* tarkoitetaan jonon kaikista alkioista muodostettua jonoa, jossa alkioiden järjestys on mielivaltainen. Esimerkiksi (1, 3, 2), (3, 2, 1) ja (1, 2, 3) ovat kaikki jonon (1, 2, 3) permutaatioita.

Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai sama kuin x. Siis esimerkiksi $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. Vastaavasti $\lceil x \rceil$ on pienin kokonaisluku, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin x. Siis esimerkiksi $\lceil \sqrt{2} \rceil = 2$, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil -\pi \rceil = -3$.

Jos f on jokin funktio tai lauseke, niin merkinnät

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) \quad \text{ja} \quad \prod_{k=a}^{b} f(k)$$

tarkoittavat summaa $f(a)+f(a+1)+\cdots+f(b)$ ja tuloa $f(a)f(a+1)\cdots f(b)$. Siis esimerkiksi

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55, \qquad \prod_{k=2}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{120}.$$

Yhteen- tai kertolaskussa mukana olevat termit saatetaan ilmaista toisinkin: esimerkiksi

$$\sum_{1\le i<j\le n} f(i, j)$$

tarkoittaa yhteenlaskua $f(1, 2)+f(1, 3)+\cdots+f(1, n)+f(2, 3)+\cdots+f(2, n)+\cdots+f(n-1, n)$.

Tuloa $\prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n$ eli n-*kertomaa* merkitään symbolilla $n!$. Lisäksi merkitään $0! = 1$. Osamäärää $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ merkitään $\dbinom{n}{k}$. Tämä luetaan "n k:n yli".

Geometrisissä yhteyksissä noudatetaan vakiintunutta käytäntöä, jonka mukaan merkintä AB voi tarkoittaa sekä janaa pistejoukkona että janan pituutta. Yhtälö $AB = CD$ tarkoittaa siis yleensä sitä, että AB ja CD ovat yhtä pitkät janat. Vastaava käytäntö koskee kulmien ja niiden suuruuksien merkitsemistä.

Osa esitetyistä kaavoista on varustettu viittaamista helpottavalla numerolla. Numerointi ei ole juoksevaa. Tiettyä viittausnumeroa, esimerkiksi (1), käytetään aina sen kaavan läheisyydessä, johon viittaus tehdään.

2 Kilpailumatematiikka ja sen osa-alueet

2.1 Erilaisia matematiikkakilpailuja

Koululaisten matematiikkakilpailut ovat periaatteessa kahdenlaisia. Suurille oppilasjoukoille tarkoitetuissa kilpailuissa tehtävät ovat usein helposti arvosteltavia monivalintatehtäviä. Kilpailijan on osattava valita tehtävän oikea ratkaisu tai oikeat ratkaisut tarjolla olevista vaihtoehdoista. Kilpailussa on yleensä paljon tehtäviä käytettävissä olevaan aikaan nähden, ja tehtävien vaikeusaste vaihtelee. Tyypillisiä tämänlaisia kilpailuja ovat *American High School Mathematics Examination* ja *Australian Mathematics Contest* sekä sen eurooppalainen jälkeläinen, *Kenguru-kilpailu*. Eräänlaisena monivalintakilpailuna voi pitää myös esimerkiksi *American Invitational Mathematical Examination* -kilpailua, jossa kilpailijan on löydettävä vastaus tuhannen vaihtoehdon joukosta: tehtävät on nimittäin muotoiltu niin, että kunkin tehtävän oikea vastaus on jokin ehdon $0 \leq n \leq 999$ toteuttava kokonaisluku n.

Monivalintatehtäväkilpailuissa on yleensä monta tehtävää, ja melko vähän aikaa. Tehtävien vaikeustaso kasvaa sarjan loppua kohden, eikä hyväkään kilpailija yleensä ehdi ratkaista kaikkia tehtäviä. Tavallisin kilpailutyyppi on sellainen, jossa jokaiseen tehtävään tarjolla olevien vastausvaihtoehtojen joukossa vain yksi on oikea. Arvata voi aina, ja jos onnistuu sulkemaan joitakin vastausvaihtoehtoja pois, voi arvaaminen olla kannattavaakin. Monivalintakilpailujen pistelasku on usein järjestetty niin, että summittainen arvaaminen on kannattamatonta: esimerkiksi kokonaan vastaamatta jätetty tehtävä saattaa tuottaa enemmän pisteitä kuin väärä vastaus.

Seuraavassa muutama esimerkki tämäntyyppisistä kilpailutehtävistä.

1. *r on luku, joka saadaan, kun a^b:n kantaluku ja eksponentti kaksinkertaistetaan ($b \neq 0$). Jos r on a^b:n ja x^b:n tulo, niin $x =$*

A. a **B.** $2a$ **C.** $4a$ **D.** 2 **E.** 4

(*American High School Mathematics Examination* vuonna 1961.)

Tällaisen tehtävän voi ratkaista joko määrittämällä x:n tehtävässä annettujen tietojen perusteella tai kokeilemalla vuoron perään annettuja vaihtoehtoja. Vastauksen arvostelija ei ole kiinnostunut ratkaisumenetelmästä, mutta edellinen tapa on toki suositeltavampi: koska $r = (2a)^{2b} = (2a)^b \cdot (2a)^b = a^b \cdot 2^b \cdot (2a)^b = a^b \cdot (2 \cdot 2a)^b = a^b \cdot (4a)^b$, oikea vastausvaihtoehto on **C**.

2. *Pussissa on* 20 *palloa ja jokaiseen on kirjoitettu kokonaisluku, joka on ainakin* 0 *mutta enintään* 10. *Jos palloon kirjoitettu luku ei ole* 0, *se on sama kuin kaikkiin muihin palloihin kirjoitettujen lukujen summa. Niiden pallojen lukumäärä, joihin on kirjoitettu* 0, *on*

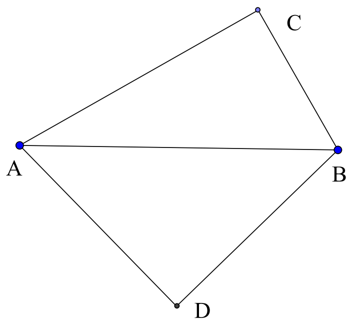
A. *enintään* 5 **B.** 10 **C.** 13 **D.** 16 **E.** *ainakin* 18

(Italialainen matematiikkakilpailu *I Giochi di Archimede* vuonna 2008.)

Vaikka asetelma voi ensi lukemalta tuntua mutkikkaalta, ratkaisu on heti nähtävissä. Jos ainakin kolmessa pallossa olisi nollaa suuremmat luvut, esimerkiksi x, y ja z, olisi $x \geq y + z$ ja siis $x > y$ mutta $y \geq x + z$, joten $y > x$. Kaikki muut vaihtoehdot kuin **E** johtavat mahdottomaan tilanteeseen.

3. *Suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat* 30 *ja* 40. *Kolmio ABD on suorakulmainen ja tasakylkinen. Mikä seuraavista on lähinnä janan CD pituutta?*

A. 50 **B.** 51 **C.** 52 **D.** 53 **E.** 54



(Bulgarian matematiikkakilpailu vuonna 1998.)

Tässä on tehtävä, jonka ratkaiseminen vaatii hiukan tietoja. Pythagoraan lauseen nojalla $AB = 50$. Siten $AD = BD = \dfrac{50}{\sqrt{2}}$. Koska kulmat $\angle BCA$ ja ADB ovat suoria, nelikulmio $ADBC$ on ympyrän sisään piirretty nelikulmio eli jännenelikulmio. CD:n määrittäminen on yksinkertaista, jos tuntee *Ptolemaioksen lauseen*: Jännenelikulmiolle $ADBC$ pätee $AD \cdot BC + AC \cdot DB = AB \cdot CD$. Kun tähän sijoitetaan tehtävän tunnetut janojen pituudet, voidaan ratkaista $CD = \dfrac{70}{\sqrt{2}}$. Koska $\dfrac{70}{\sqrt{2}} < \dfrac{70}{1{,}4} = 50$, oikea vastausvaihtoehto on **A**.

4. *Määritä pienin positiivinen kokonaisluku, jonka kolmas potenssi päättyy 888:aan.* (*American Invitational Mathematics Examination* vuonna 1988.)

Tässä kilpailija tietää, että kaikki vastaukset ovat kokonaislukuja 0:n ja 999:n väliltä. Olisi siis mahdollista ruveta kokeilemaan. Nopeammin ratkaisuun pääsee etenemällä järjestelmällisesti. Ainoa välin [0, 9] kokonaisluku, jonka kolmas potenssi on 8, on 2. Kysytty luku on siis $10x + 2$, missä x on jokin kokonaisluku. Mutta $(10x + 2)^3 = 1000x^3 + 600x^2 + 120x + 8$. Tämän luvun toiseksi viimeinen numero on sama kuin luvun $12x$ viimeinen numero. Nyt luvun $12x$ viimeinen numero on 8 silloin ja vain silloin, kun x:n viimeinen numero on 4 tai 9. Mutta jokainen luku, jonka viimeinen numero on 4 tai 9 on muotoa $5y + 4$, missä y on jokin kokonaisluku. Näin ollen etsittävä luku on muotoa $50y + 42$. Pieni numerolaskutyö (kilpailuissa ei yleensä saa käyttää apuneuvoja kuten laskimia!) osoittaa, että $(50y + 42)^3 = 125000y^3 +$

$315000y^2 + 264600y + 74088$. Luvun kolmanneksi viimeinen numero on 8, jos luvun $2646y$ viimeinen numero on 8. Pienin y, jolla tämä tapahtuu, on 3. Silloin $50y + 42 = 192$, ja ratkaisu on löytynyt.

* * *

Yleisempi ja tavallisesti sekä kilpailijan että arvostelijan kannalta vaativampi kilpailumuoto on sellainen, jossa kilpailijan tulee tuottaa ratkaisu perusteluineen, periaatteessa siis samoin kuin vaikkapa ylioppilaskirjoituksissa. Tällainen on muodoltaan vanhin matematiikan koululaiskilpailu, Unkarin *Eötvös–Kürschak-kilpailu*, näin toimitaan Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa ja yleensä eri maiden kansallisten matematiikkakilpailujen päätöskierroksilla. Tehtävän ratkaisu on joko perusteltu lukuarvoinen tai lausekkeen muotoinen vastaus tai suorastaan jonkin väitteen perustelu eli todistus. Silloin tehtävän tekstissä, alussa tai pidemmällä, esiintyy sana *todista* tai *osoita*. Mutta myös silloin, kun tehtävänä on tuottaa esimerkiksi jokin lukuarvoinen vastaus, niin olennaista ei ole tuo lukuarvon löytyminen, vaan se, miksi juuri kyseinen arvo on se haluttu. Kun monien tällaisten kilpailujen nimenä on "matematiikkaolympialaiset", voimme kutsua tämäntyyppisiä tehtäviä *olympiatehtäviksi*.

Seuraavassa muutama esimerkki olympiatyyppisistä kilpailutehtävistä:

5. *Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, jolla on nollakohdat* 1997 *ja* 2010. *Oletetaan lisäksi, että $|P(2005)| < 10$. Mitä kokonaislukuarvoja $P(2005)$ voi saada?* (Suomen lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu vuonna 2010.)

Tehtävän ratkaisussa kysytään lukuarvoja, mutta olennaista on selvittää, miksi ratkaisu on se mikä se on. Tunnetusti polynomi $R(x)$, jolle $R(c) = 0$, on jaollinen polynomilla $x - c$. Vähemmän selvää, mutta myös tunnettua[1] on, että jos R:n kertoimet ovat kokonaislukuja ja c on kokonaisluku, niin $R(x) = (x - c)S(x)$, missä myös $S(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi. Tähän tehtävään sovellettuna $P(x) = (x - 1997)(x - 2010)Q(x)$, missä $Q(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi. Sijoitetaan tähän $x = 2005$. Silloin $P(2005) = -40Q(2005)$. Jos $Q(2005) \neq 0$, on $|P(2005)| \geq 40$. Ainoa tehtävän ehdon täyttävä mahdollisuus on $0 = Q(2005) = P(2005)$.

6. *Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Todista, että luku $25m + 3n$ on jaollinen* 83*:lla, jos ja vain jos luku $3m + 7n$ on jaollinen* 83*:lla.* (Baltian Tie -joukkuematematiikkakilpailu vuonna 1990.)

On melko helppo huomata, että 83 on alkuluku. Merkitään $x = 25m + 3n$ ja $y = 3m+7n$. Muodostetaan luku $7x-3y = (7\cdot25-3\cdot3)m = 166m = 83\cdot(2m)$. Jos nyt x on jaollinen 83:llä, on luku $3y = 7x-83\cdot(2m)$ jaollinen 83:lla. Koska alkuluvuilla 3 ja 83 ei ole yhteisiä tekijöitä, niin y:n on oltava on jaollinen

[1] Katso numero 31.

83:lla. Aivan samoin päätellään, että jos y on jaollinen 83:lla, niin x:kin on jaollinen tällä luvulla.

7. *Monellako eri tavalla luvut* $1, 2, \ldots, n$ *voidaan kirjoittaa järjestykseen, niin että jokainen luku on kaikkia edeltäviä lukuja suurempi tai kaikkia edeltäviä lukuja pienempi?* (Kanadan matematiikkaolympialaiset vuonna 1989.)

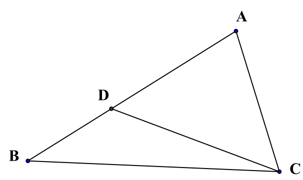
Tässä on taas tehtävä, johon odotetaan vastausta, joka on luku tai luultavimmin n:n lauseke. Kokeilemalla voi luvun arvata: luvuille 1 ja 2 sekä järjestys 1, 2 että järjestys 2, 1 kelpaavat, luvuille 1, 2, 3 löytyy neljä kelvollista järjestystä: 1, 2, 3; 2, 1, 3; 2, 3, 1 ja 3, 2, 1. Kahden esimerkin perusteella on rohkeaa mennä väittämään, että tehtävässä kysytty lukumäärä olisi 2^{n-1}. Näin kuitenkin on, mutta perusteluksi on lähdettävä rakentamaan järjestystä viimeisestä luvusta. Se voi olla vain 1 tai n. Viimeistä edellinen luku on jäljellä olevista suurin tai pienin. Näin kaikkiin muihin paitsi jonon ensimmäiseen paikkaan on kaksi vaihtoehtoa, joten erilaisia jonoja on todellakin 2^{n-1} kappaletta.

8. *Kolmion ABC sivulta BC valitaan piste A_1. Pisteiden B ja C kautta piirretään AA_1:n suuntaiset suorat. Suora AB leikkaa C:n kautta piirretyn suoran pisteessä C_1 ja suora AC leikkaa B:n kautta piirretyn suoran pisteessä B_1. Todista, että*

$$\frac{1}{AA_1} = \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1}.$$

(Unkarin Eötvös-kilpailu vuonna 1905)

Tämä vanha tehtävä on tyypillinen geometrinen todistustehtävä. Sellaiset ovat yhä hyvin tavallisia matematiikkakilpailuissa. Ratkaisun työkaluksi tarvitaan vain kolmioiden yhdenmuotoisuus. Kolmiot ABA_1 ja C_1BC ovat keskenään yhdenmuotoiset, samoin kolmiot AA_1C ja B_1BC. Edellisestä yhdenmuotoisuudesta saadaan



$$\frac{BA_1}{A_1A} = \frac{BC}{CC_1},$$

jälkimmäisestä

$$\frac{A_1C}{A_1A} = \frac{BC}{BB_1}.$$

Kun edelliset kaksi verrantoa lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$BC\left(\frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1}\right) = \frac{BA_1 + A_1C}{AA_1} = \frac{BC}{AA_1}.$$

Haluttu yhtälö saadaan, kun supistetaan BC:llä.

2.2 Kilpailumatematiikan osa-alueita

Kun koululaisten matematiikkakilpailuja ruvettiin pitämään, ajatus oli käyttää tehtäviä, joiden ratkaiseminen on mahdollista koulutietojen perusteella. Perinteinen koulumatematiikka oli *geometriaa* ja *algebraa*. Nämä alueet ovat säilyneet kilpailumatematiikan osa-alueina paljon paremmin kuin matematiikan opetussuunnitelman sisältönä. Sittemmin ainakin kansainvälisten matematiikkakilpailujen tehtäväalueiksi ovat kiteytyneet myös *lukuteoria* ja *kombinatoriikka*. Eri maiden kansalliset kilpailut toki saattavat paremmin ottaa huomioon kyseisen maan koulujen käytäntöjä ja opetussuunnitelmia. Ja usein hyvä tehtävä sisältää aineksia eri matematiikan osa-alueilta. Edellisistä esimerkeistä numerot 1 ja 5 ovat lähinnä algebran, 3 ja 8 geometrian, 4 ja 6 lukuteorian ja 2 ja 7 kombinatoriikan tehtäviä.

Koulumatematiikassa niin Suomessa kuin muuallakin on merkittävässä asemassa matematiikan osa-alue *analyysi*, johon kuuluu mm. differentiaali- ja integraalilaskenta. Jostain syystä analyysiin kuuluvat tehtävät eivät ole kansainvälisten matematiikkakilpailujen normaalialaa, vaikka eri maiden kansallisissa matematiikkakilpailuissa sellaisia toki esiintyy. Ei analyysin taidoista tietenkään haittaa ole, mutta ne eivät ole kilpailumatematiikassa keskeisiä. Toinen koulumatematiikkaan liittyvä, mutta kilpailuissa harvinaisempi matematiikan ala on *todennäköisyyslaskenta*. Alkeellisen todennäköisyyden tehtävien olennainen osa on usein suotuisien alkeistapausten osuuden laskeminen. Tämäntapaiset ongelmat ovat kilpailumatematiikassa tavallisia, mutta ne luetaan siellä kombinatoriikan piiriin.

Hyvässä kilpailutehtävässä on usein eri kilpailumatematiikan osa-alueisiin liittyviä piirteitä. Ratkaisijan ei missään tapauksessa tule sitoa ajatteluaan "tämä on aihetta X, siis muistelen alueen X keinoja" -tapaisesti.

3 Todistamisesta

Kilpailumatematiikan tehtävien ratkaisutaidoista olennaisin on *todistaminen*. Sitä valitettavan vähän harrastetaan koulun oppimäärässä, vaikka itse matematiikka paljolta onkin juuri oikeaksi arveltujen asioiden oikeaksi todistamista. Tässä luvussa esitetään lyhyesti muutama todistustapa.

3.1 Suora ja epäsuora todistus

Tavallisessa *suorassa todistuksessa* edetään loogisin askelin tehtävässä annetuista tosiasioista eli *oletuksesta* ja muuten yleisesti tunnetuiksi hyväksytyistä totuuksista kohti haluttua tilannetta eli *väitettä*. Tehtävänratkaisun kannalta ongelmallista on toisinaan se, mitä kulloinkin voi pitää yleisesti tunnettuna. Vaikka on yritetty kirjoittaa luetteloita niistä eri matematiikan alojen totuuksista, joihin kilpailuratkaisuissa voi nojautua, niin mitään tällaista varmaa ja kaikkien tunnustamaa listaa ei ole kyetty kokoamaan. Olennaisin ratkaisijan tuki on tehtäviä paljon ratkaiseville kehittynyt tuntuma ja kokemus siitä, mikä on sopivaa. Yleisenä ohjeena voisi sanoa, että ei ole oikein käyttää hyväksi asioita, jotka ovat jollain tavalla monimutkaisempia ja pitemmälle meneviä kuin se, mitä halutaan todistaa. Tämän esityksen eri luvuissa otetaan jonkin verran kantaa siihen, mikä eri kilpailumatematiikan aloilla saattaa olla sopivaa pohjatietoa.

Edellä tehtäviin 6 ja 8 annetut ratkaisut ovat suoria todistuksia. Esitetään vielä pari muuta.

9. *Olkoot a, b ja c sellaiset kokonaisluvut, että $a + b + c = 0$. Todista, että $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ on neliöluku.* [Kokonaisluku on neliöluku, jos se on kokonaisluvun toinen potenssi.] (Etelä-Afrikan *Talent Search* -kilpailu vuonna 1996.)

Tehtävän ratkaisemiseksi eli todistuksen muodostamiseksi kirjoitetaan lauseke $a^4+b^4+c^4$ uuteen muotoon käyttämällä hyväksi luvuista a, b, c tehtyä oletusta ja soveltamalla binomin ja trinomin toisen potenssin kaavoja. Siis $a^4+b^4+c^4 = a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2(a^2bc + b^2ca + c^2ab) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a + b + c) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^2)$. Mutta yhtälöketjun päistä voidaan lukea, että $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2$, ja esitetty väite on todistettu.

10. *Todista, että jos valitaan jotkin* 17 *eri suurta, mutta ehdon* $1 \le n \le$

25 *toteuttavaa kokonaislukua, niin joukossa on ainakin kaksi sellaista lukua, joiden tulo on neliöluku.* (Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 1995.)

Ratkaisu löytyy niin, että jaetaan joukko $\{1, 2, \ldots, 25\}$ sopivasti 16:ksi osajoukoksi, jotka ovat $\{1, 4, 9, 16, 25\}$, $\{2, 8, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{5, 20\}$, $\{6, 24\}$, $\{7\}$, $\{10\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{14\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$, $\{21\}$, $\{22\}$ ja $\{23\}$. Niissä joukoissa, joissa on ainakin kaksi alkiota, jokaisen kahden alkion tulo on neliöluku. Mutta 17:stä luvusta jotkin kaksi kuuluvat välttämättä samaan joukkoon, ja väite on todistettu.

* * *

Epäsuora todistus on monesti hiukan vaikeampi rakentaa kuin suora, mutta sen avulla voi toisinaan todistaa yllättävämpiä ja hienompia asioita. Kun tehtävässä annetuista oletuksista lähtien pyritään todistamaan jokin väite, muodostetaan väitteelle vastakkaisesta asiasta uusi oletus, *vastaoletus*, ja lähdetään päättelemään sen perusteella. Tavoite on päätyä tilanteeseen joka on ristiriidassa oletuksen tai muun tietämyksen kanssa. Koska laillisilla päättelyaskelilla oikeista lähtökohdista pystyy pääsemään vain oikeisiin ja tosiin johtopäätöksiin, niin ristiriita osoittaa, että lähtökohdissa on ollut vikaa. Vastaoletuksen onkin oltava virheellinen. Mutta silloin vastaoletukselle vastakkainen asia, eli alkuperäinen väitös, onkin tosi, ja todistus on valmis. (Joskus näkee epäsuoraa todistusta aloitettavan fraasilla "tehdään vastaväite". Tämä on epäjohdonmukaista. Todistuksessa pyritään näyttämään toteen jokin *väite* niin, että nojaudutaan joihinkin *oletuksiin*. Epäsuorassa todistuksessa ei pyritä näyttämään toteen väiteelle vastakkaista asiaa, vaan tämä vastakkainen asia oletetaan todeksi siinä toivossa, että tämä oletus johtaisi mahdottomuuksiin ja siten osoittautuisi vääräksi. Siksi *vastaoletus* eikä vastaväite.)

Seuraavassa muutama esimerkki epäsuorasta todistuksesta.

11. *Todista, että ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä ympyrän sädettä vastaan.*

Määritelmän mukaan tangentti on sellainen suora ℓ, joka koskee ympyrää vain yhdessä pisteessä P, mutta muuten on kokonaan ympyrän ulkopuolella. Olkoon O ympyrän keskipiste. Piirretään O:n kautta suora, joka on kohtisuorassa ℓ:ää vastaan. Leikatkoon se ℓ:n pisteessä Q. Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että $Q = P$. Tehdään vastaoletus: $Q \neq P$. Silloin OQP on suorakulmainen kolmio ja $\angle OQP$ on suora kulma ja OP on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on pitempi kuin sen kateetti. OP on pitempi kuin OQ, joten Q on lähempänä ympyrän keskipistettä kuin kehäpiste Q. Q on siis ympyrän sisäosan piste. Mutta tästä seuraa, että suora ℓ ei ole kokonaan ympyrän ulkopuolella, toisin kuin oletettiin. Vastaoletus on siis väärä, onkin $Q = P$ ja $OP \perp \ell$.

12. *Osoita, että jos m ei ole neliöluku eli jonkin kokonaisluvun toinen potenssi, niin $\sqrt{m}$ ei ole rationaaliluku.*

Aloitetaan epäsuora todistus tekemällä vastaoletus: $\sqrt{m}$ onkin rationaaliluku. Siis $\sqrt{m} = \frac{p}{q}$ joillain kokonaisluvuilla p ja q, jotka kumpikaan eivät ole nollia ja joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Siispä $m = \frac{p^2}{q^2}$ eli $p^2 = mq^2$. Koska m ei ole minkään kokonaisluvun toinen potenssi, jokin m:n alkutekijä esiintyy luvun m alkutekijähajotelmassa parittomalla potenssillaan, ts. on olemassa alkuluku c ja pariton positiivinen kokonaisluku $2n+1$ siten, että c^{2n+1} on luvun m tekijä, mutta c^{2n+2} ei ole. Siis $m = c^{2n+1}m_1$, missä c ei ole luvun m_1 tekijä. Nyt c on luvun p^2 tekijä, ja koska c on alkuluku, se on luvun p tekijä. Kaikkiaan siis jollain k c^k on luvun p tekijä, mutta c^{k+1} ei ole. Siis $p = c^k p_1$, missä c ei ole luvun p_1 tekijä. Jos nyt yhtälöä $p^2 = mq^2$ eli $c^{2k}p_1^2 = c^{2n+1}m_1q^2$ supistetaan c^{2n+1}:llä, saadaan $c^{2(k-n)-1}p_1^2 = m_1q^2$. Luvun c eksponentti on pariton, joten se ei ole 0. Koska c ei ole m_1:n tekijä, se on luvun q^2 tekijä. Koska c on alkuluku, se on luvun q tekijä. Mutta tämä merkitsee, että c on sekä p:n että q:n tekijä. Jouduttiin ristiriitaan sen tehdyn oletuksen kanssa, että p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä.

13. *Osoita, että kolmelle positiiviselle reaaliluvulle a, b ja c pätee epäyhtälö*

$$\max\{a^2 - b,\, b^2 - c,\, c^2 - a\} \geq \max\{a^2 - a,\, b^2 - b,\, c^2 - c\}.$$

(Leningradin matematiikkaolympialaiset vuonna 1991.)

Merkitään väitetyn epäyhtälön vasemman puolen lukua p:llä ja oikean puolen lukua q:lla. Tehdään vastaoletus $p < q$. Voidaan olettaa, että $q = a^2 - a$. Koska $a^2 - a = q > p \geq a^2 - b$, on $b \geq a$, ja koska $a^2 - a = q > p \geq b^2 - c \geq a^2 - c$, on myös $c > a$. Mutta nyt $p \geq c^2 - a > a^2 - a = q$. Oletuksesta $p < q$ seurasi $q < p$. Ristiriita osoittaa, että vastaoletus on väärä ja väite siis tosi.

3.2 Induktiotodistus

Matematiikassa yleensä ja myös kilpailutehtävissä on melko usein esiintyvä tilanne se, että todistettava on väite, joka koskee tavalla tai toisella kaikkia positiivisia kokonaislukuja tai kaikkia jotain rajaa suurempia kokonaislukuja. Normaali tapa etsiä todistusta tällaiselle väitteelle on tarkastella ensin sen paikkansapitävyyttä pienillä ja yleensä helpoilla lukuarvoilla. Jos väite tuntuu pitävän paikkansa, voi olla syytä uskoa, että se pitää paikkansa kaikilla mahdollisilla arvoilla. Näinhän ei tarvitse olla. Mutta tällaisen väitteen pitävä todistus on usein mahdollista suorittaa menetelmällä, jota kutsutaan *induktioksi*. (Edellä kuvattua yksityistapauksiin perustuvaa epävarman yleistyksen tekoa on nimitetty myös induktioksi. Sen erotukseksi matematiikan induktiota kutsutaan joskus *täydelliseksi induktioksi*.) Induktiotodistusta voi verrata tikapuihin: katolle pääsemiseksi riittää, että pystyy nousemaan alimmalle askelmalle ja sitten jokaiselta askelmalta seuraavalle.

Induktiotodistus rakentuu kahdesta vaiheesta. Ensin todistettava väite on näytettävä oikeaksi pienimmälle mahdolliselle luvulle, jolle väitteen tulisi päteä. Toisessa vaiheessa oletetaan, että väite pätee jollekin luvulle ja tähän oletukseen nojautuen todistetaan, että se pätee seuraavallekin luvulle. Vähän muodollisemmin ilmaistuna:

Jos jokin kokonaisluvusta n riippuva väite $P(n)$ on tosi kokonaisluvulla n_0 ja jos kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq n_0$ siitä että $P(n)$ on tosi seuraa, että $P(n+1)$ on tosi, niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq n_0$.

Toisinaan induktioaskeleen oletus, siis ”$P(n)$ on tosi”, on korvattava hiukan vaativamman näköisellä, mutta itse asiassa samansisältöisellä oletuksella ”$P(k)$ on tosi kaikilla $k \leq n$”.

Valaistaan menetelmää muutamin esimerkein.

14. *Todista, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n on*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

Esitetään väitteelle induktiotodistus. Ensimmäinen vaihe on väitteen todistaminen oikeaksi pienimmälle mahdolliselle n:lle, joka on 1. Todellakin:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Toisessa vaiheessa oletetaan, että yhtälö (1) pätee jollakin luonnollisella luvulla $n = k$. Mutta jos näin on, niin

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \frac{(k+1)\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right)}{6} \\ = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} &= \frac{(k+1)\left((k+2)(2k+3)\right)}{6} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Yhtälö (1) on siis voimassa myös, kun $n = k+1$. Tämä siis sillä edellytyksellä, että yhtälö on tosi, kun $n = k$. Induktioperiaatteen nojalla tiedämme nyt, että yhtälö on voimassa jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n. Voimme (periaatteessa) lähteä arvosta $n = 1$, jolla yhtälö siis on totta, ja toistaa *induktioaskeleen* niin monta kertaa, että pääsemme mihin tahansa lukuun n.

15. *Määritellään lukuparit (x_n, y_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ asettamalla $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ja $x_{n+1} = x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$, kun $n \geq 0$. Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla pätee $x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$.* (DDR:n matematiikkaolympialaiset vuonna 1965.)

Todistetaan induktiolla. Väite pätee, kun $n = 0$. Oletetaan, että se pätee, kun $n = k$, missä $k \geq 0$ on mielivaltainen. Silloin $x_{k+1}^2 - 2y_{k+1} = (x_k + 2y_k)^2 - 2(x_k + y_k)^2 = x_k^2 + 4x_k y_k + 4y_k^2 - 2x_k^2 - 4x_k y_k - 2y_k^2 = -x_k^2 + 2y_k^2 = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$. Induktioaskel on otettu ja väite on tullut todistetuksi.

Seuraava esimerkki edustaa tapausta, jossa induktioaskel lähtee siitä, että väite oletetaan todeksi kaikilla $k \leq n$ ja tähän perustuen todistetaan väite oikeaksi, kun $k = n + 1$.

16. *Eräässä maassa on äärellinen määrä kaupunkeja. Tiet kaupunkien välillä ovat yksisuuntaisia. Jos tarkastellaan mitä hyvänsä kahta kaupunkia, niin toiseen niistä pääsee teitä pitkin toisesta. Todista, että maassa on kaupunki, josta voi päästä teitä pitkin kaikkiin muihin kaupunkeihin.* (Baltian Tie -joukkuematematiikkakilpailu vuonna 1992.)

Todistetaan väite induktiolla kaupunkien lukumäärän n suhteen. Jos $n = 2$, väitteen totuus on ilmeinen. Olkoon sitten $n = k \geq 2$. Oletetaan, että väite pätee, kun $n \leq k$. Tarkastellaan tilannetta, jossa kaupunkeja on $k + 1$ kappaletta. Olkoot kaupungit $K_1, K_2, \ldots, K_{k+1}$. Tarkastellaan kaupunkia K_1. Olkoon A niiden kaupunkien joukko, joihin on pääsy K_1:stä ja B niiden kaupunkien joukko, joihin ei ole pääsyä K_1:stä. Jos B on tyhjä joukko, K_1 kelpaa tehtävässä kysytyksi kaupungiksi. Oletetaan sitten, että B ei ole tyhjä joukko. Jokaisesta B:n kaupungista on yhteys kaupunkiin K_1. Yhdestäkään joukon A kaupungista ei ole yhteyttä yhteenkään joukon B kaupunkiin (sillä jos johonkin olisi, niin K_1:stäkin olisi yhteys tähän). Jokaisen kahden B:n kaupungin välillä on yhteys. Edellisen perusteella tällainen yhteys kulkee pelkästään B:hen kuuluvien kaupunkien kautta. Koska B:ssä on enintään k kaupunkia, induktio-oletuksen mukaan jostakin B:n kaupungista on yhteys jokaiseen muuhun B:n kaupunkiin. Tästä kaupungista on edellä todetun perusteella K_1:n kautta yhteys myös jokaiseen A:n kaupunkiin.

Induktiotodistus voidaan toisinaan järjestää myös "takaperin", suuremmista arvoista pienempiin. Näin voidaan tehdä etenkin tapauksissa, joissa pyritään osoittamaan jokin kokonaisluvusta riippuva väittämä epätodeksi. Jos siitä, että väittämä on tosi kokonaisluvulla n aina seuraa, että se on tosi myös arvolla $n-1$, voidaan laskeutua sellaisiin pieniin n:n arvoihin, joista nähdään, että väittämä ei voi olla tosi. Epäsuoran todistamisen periaatteen mukaan ei väittämä nyt voi olla tosi oletetulla alkuarvolla n. Tällaisista todistuksista nähdään esimerkki luvussa Lukuteoria (katso numero 114).

Induktioperiaatteen kanssa yhtäpitävää on se aika usein käyttöön tuleva tieto, että ylhäältä rajoitetussa kokonaislukujoukossa on suurin luku ja alhaalta rajoitetussa kokonaislukujoukossa on pienin luku. Tämän voi todistaa induktiolla joukon alkioiden lukumäärän suhteen. Yksialkioisessa joukossa on suurin luku, joukon ainoa alkio. Jos kaikissa n-alkioisissa joukoissa on suurin luku ja joukossa A on $n+1$ alkiota, joista yksi on a, niin joukossa $B = A \setminus \{a\}$ on n alkiota. Olkoon b B:n suurin alkio. Nyt joko $b \geq a$, jolloin b on A:nkin suurin alkio, tai $a > b$, jolloin a on A:n suurin alkio. Jos joukossa on äärettömän monta alkiota, valitaan niistä yksi, esimerkiksi a_0. Koska joukko on ylhäältä rajoitettu, siinä siinä on äärellisen monta alkiota, jotka ovat $\geq a_0$; näiden joukossa on suurin alkio, joka varmasti on koko joukon suurin alkio. – Alhaalta rajoitetun joukon pienintä alkiota koskeva väite todistetaan samoin.

Kilpailutehtävien laatijat suosivat monesti tehtäviä, joissa jokin väite sisältää jonkin ei suurehkon kokonaisluvun, esimerkiksi kahdentuhannen paikkeilla olevan vuosiluvun. Vuosilukuun voi liittyä jokin esimerkiksi jaollisuusominaisuus, jolla on merkitystä tehtävän ratkaiussa. Mutta ei ole harvinaista, että tällaisen tehtävän ratkaisuksi oikeastaan haetaan päättelyä, joka osoittaa väitteen pätevän esimerkiksi kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla. Tällaisen tehtävän tullessa vastaan on siis yleensä harkittava induktiotodistuksen mahdollisuutta.

4 Algebra

Kilpailumatematiikassa algebran alaan on tapana lukea tehtävät, joiden aiheena ovat polynomit ja yhtälönratkaisu, epäyhtälöt, joiden sisältö ei ole geometriaa, ja funktionaaliyhtälöt. Algebran tehtävissä saattaa myös olla kysymys lukujonoista ja summista, vaikka näihin keskeisesti liittyvät kysymykset raja-arvoista ja suppenemisesta menevätkin yleensä matemaattisen analyysin puolelle ja siten "kansainvälisen kilpailumatematiikan" ulkopuolelle. Algebrallisia perustaitoja kuten vakiintuneita lausekkeiden sieventämiskeinoja ja kompleksilukuja voidaan tarvita ja tarvitaan kaikenlaisissa tehtävissä. Tässä luvussa käsitellään myös näitä algebrallisia työkaluja.

4.1 Lausekkeiden muokkaamisesta

Algebraa tarvitaan kaiken aikaa erilaisissa tehtävissä, ainakin lausekkeiden muokkaamiseen kulloinkin tarpeellisiin ja hyödyllisiin muotoihin. Muokkaamisen apuvälineitä ovat monet *identiteetit*, aina voimassa olevat yhtälöt. Tällaisia ovat mm. seuraavat (n on positiivinen kokonaisluku).

$$
\begin{gathered}
a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),\\
a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2,\\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j,\\
a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),\\
a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}),\\
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\\
(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.
\end{gathered}
$$

17*. *Todista edelliset identiteetit. Käytä tarvittaessa induktiotodistusta.*

Luvussa 1.3 määriteltiin n-kertoma $n!$ ja merkintä $\binom{n}{k}$. Seuraava tehtävä osoittaa näiden lukujen yhteyden *Pascalin*[1] *kolmioon*, lukumuodostelmaan,

[1] *Blaise Pascal* (1623–62), ranskalainen matemaatikko ja filosofi.

jossa kukin luku on kahden vinottain sen yläpuolella olevan luvun summa:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \dots & & \dots & & \dots & & &
\end{array}$$

18. *Todista, että*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

kun $n \geq 1$ *ja* $0 \leq k < n$.

Todistus on suora lasku:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$
$$= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(1+n)}{(k+1)!(n+1-k-1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Seuraavan tehtävän sisältö on *binomikaava*. Kaava perustelee sen, että lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*, ja sen että kertoimet lausekkeeseen, joka syntyy kun lausekkeeseen $(a+b)^n$ sisältyvät kertolaskut suoritetaan, voidaan lukea Pascalin kolmion n:nneltä riviltä. Binomikertoimien eräisiin mielenkiintoisiin ominaisuuksiin tutustutaan luvussa Kombinatoriikka.

19*. *Todista induktiota käyttäen, että*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Seuraavat summaidentiteetit tulevat myös aika ajoin käyttöön:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (a+bk) = \frac{(n+1)(2a+bn)}{2},$$
$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \quad (q \neq 1).$$

Identiteeteistä viimeistä edellinen on *aritmeettisen jonon* ja viimeinen *geometrisen jonon summakaava.*

20*. *Todista edelliset identiteetit. Toista ei tarvitse, koska se on jo käsitelty tehtävässä* 14.

4.2 Kompleksiluvut

Matematiikkakilpailuissa oletetaan, että kilpailijat tuntevat kompleksilukujen perusominaisuudet. Ne ovat tarpeellisia myös polynomien ja algebrallisten yhtälöiden ymmärtämisessä. Kompleksilukujen geometrinen tulkinta tekee niistä käyttökelpoisia monien geometristen tehtävien ratkaisemisessa (tästä muutama esimerkki luvussa Geometria).

Kompleksiluvut ovat muotoa $z = x + iy$ olevia symboleja. Tässä $x = \mathrm{Re}z$ ja $y = \mathrm{Im}z$ ovat reaalilukuja ja i symboli, joka tottelee laskusääntöä $i^2 = -1$. x on z:n *reaaliosa* ja y sen *imaginaariosa*. Kompleksilukujen laskutoimitukset noudattavat reaalilukujen laskutoimituksia, kun symbolia i käsitellään niin, että sääntö $i^2 = -1$ toteutuu. Näinpä kompleksilukujen $z = x + iy$ ja $w = u + iv$ kertolasku noudattaa kaavaa

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu)$$

ja jakolasku kaavaa

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{xu + yv + i(-xv + yu)}{u^2 + v^2}.$$

Niitä kompleksilukuja, joiden imaginaariosa on 0, voidaan pitää reaalilukuina.

Kompleksiluvuilla laskettaessa hyödyllinen käsite on kompleksiluvun $z = x + iy$ *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti*. Se on kompleksiluku $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

21*. *Todista:*

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},$$
$$\overline{zw} = \overline{zw}$$
$$\overline{az} = a\overline{z}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Edellisestä seuraa, että $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

22*. *Kirjoita kompleksiluvun z reaali- ja imaginaariosat z:n ja $\overline{z}$:n avulla.*

Kompleksiluvun $z = x + iy$ *itseisarvo* $|z|$ on luku

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

23*. *Todista, että kompleksiluvun itseisarvolle pätee $|z|^2 = z\overline{z}$, $|zw| = |z||w|$, $|z^n| = |z|^n$ (kun n on kokonaisluku) ja $|z + w| \le |z| + |w|$.*

Jos kompleksiluku $z = x+iy$ samastetaan xy-tason pisteen $P = (x, y)$ kanssa, niin $|z|$ on janan OP pituus, ja voidaan kirjoittaa $x = |z|\cos\phi$, $y = |z|\sin\phi$, missä ϕ on x-akselin ja suoran OP välinen kulma laskettuna x-akselista vastapäivään kiertäen. Siis

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}.$$

Tässä on käytetty *Eulerin*[1] *kaavaa*

$$\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}.$$

Eulerin kaava perustuu sini-, kosini- ja eksponenttifunktioiden sarjakehitelmiin, eikä sitä sen vuoksi todisteta tässä. Kaavaa voi kuitenkin vapaasti käyttää kilpatehtävien ratkaisemisessa. – Kulmaa ϕ sanotaan z:n *argumentiksi*, ja on tapana merkitä $\phi = \arg z$. Argumentti ei ole yksikäsitteinen: myös $\phi + 2n\pi$, missä n on mielivaltainen kokonaisluku, on z:n argumentti.

24*. *Todista, että*

$$zw = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)},$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\arg z - \arg w)},$$

ja että

$$z^n = |z|^n e^{in\arg z},$$

kun on kokonaisluku.

Viimeinen kaava pätee myös muilla kuin kokonaislukueksponenteilla n ja mahdollistaa siten esim. juurien ottamisen kompleksiluvuista. Argumentin monikäsitteisyys aiheuttaa sen, että esimerkiksi ”neliöjuuri” ei kuitenkaan ole aivan hyvinmääritelty käsite.

4.3 Polynomit ja yhtälöt

Olkoot $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kiinteitä lukuja ja $a_n \neq 0$. Muuttujan (joka voi olla reaali- tai kompleksiluku) x funktio p,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

on (yhden muuttujan) polynomi ja n sen *aste*; merkitään $n = \deg p$. Luvut a_i ovat polynomin p *kertoimet*. Jos ne ovat kaikki kokonaislukuja, rationaalilukuja, reaalilukuja tai kompleksilukuja, puhutaan vastaavasti *kokonaiskertoimisesta, rationaalikertoimisesta, reaalikertoimisesta* tai *kompleksikertoimisesta* polynomista. Myös funktiota, joka saa kaikkialla vakioarvon 0, on tapana kutsua polynomiksi, *nollapolynomiksi*. Nollapolynomin aste on määrittelemätön. Jos polynomin p aste on n, p:tä kutsutaan *n:nnen asteen polynomiksi*.

[1] *Leonhard Euler* (1707–83), sveitsiläinen matemaatikko.

25*. *Todista, että* $\deg(p+q) \le \max\{\deg p, \deg q\}$, $\deg(pq) = \deg p + \deg q$. *Voiko olla* $\deg(p+q) < \max\{\deg p, \deg q\}$*?*

26*. *Todista, että jos* $p(z)$ *on polynomi, jonka kertoimet ovat reaalilukuja, niin* $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

Kahden muuttujan n:nnen asteen polynomi on vastaavasti funktio

$$\begin{aligned} p(x, y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ + \cdots + a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0n}y^n, \end{aligned}$$

missä ainakin jokin kertoimista $a_{n-k,k} \neq 0$. Useamman kuin kahden muuttujan polynomit ja niiden aste määritellään analogisesti. Kilpatehtävissä saattaa esiintyä useamman kuin yhden muuttujan polynomeja, mutta yleensä niin, että ratkaisussa olennaisesti tarvitaan vain yhden muuttujan polynomin ominaisuuksia.

Jos $p(r) = 0$, niin r on p:n *nollakohta* tai *yhtälön* $p(x) = 0$ *juuri*.

Kahden muuttujan polynomi $p(x, y)$ voi olla $= 0$ äärettömän monessa pisteessä (x, y). Tällaisten pisteiden sanotaan muodostavan *algebrallisen käyrän*. Puhutaan myös yhtälön $p(x, y) = 0$ *kuvaajasta.*

Toisen asteen reaalikertoimisella polynomilla $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, on tasan kaksi reaalista nollakohtaa, jos sen *diskriminantti* $\Delta = b^2 - 4ac$ on positiivinen. Jos $\Delta = 0$, p:llä on tasan yksi reaalinen nollakohta. Jos $\Delta < 0$, p:llä ei ole reaalisia nollakohtia, mutta kylläkin kaksi kompleksista nollakohtaa. Nollakohtien lausekkeet ovat

$$r_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\Delta}).$$

27*. *Johda toisen asteen yhtälön ratkaisut täydentämällä lauseke* $ax^2 + bx$ *ensimmäisen asteen polynomin toiseksi potenssiksi eli neliöksi.*

(Tämä *neliöksi täydentäminen* on usein käytetty keino lausekkeiden muokkauksessa, kannattaa pitää mielessä!)

Suora lasku osoittaa heti, että $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$ ja $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$.

Monien polynomien ominaisuuksien perustana on *jakoyhtälö*. Jos u ja v ovat polynomeja ja $\deg u \geq 1$, niin on olemassa polynomit q ja r, $\deg r < \deg u$, siten, että

$$v(x) = q(x)u(x) + r(x). \tag{1}$$

28. *Todista, että jakoyhtälön polynomit* q *ja* r *ovat yksikäsitteisiä.*

Yksikäsitteisyys tulee osoitetuksi, jos näytetään, että mitkä tahansa kaksi yhtälön toteuttavaa polynomiparia ovat keskenään samat. Oletetaan siis, että $v(x) = q_1(x)u(x) + r_1(x)$ ja $v(x) = q_2(x)u(x) + r_2(x)$, missä r_1 ja r_2 ovat polynomeja, joiden aste on $< \deg u$. Silloin $r_1(x) - r_2(x) = (q_2(x) - q_1(x))u(x)$.

Numeron 25 mukaan yhtälön vasemmalla puolella on joko nollapolynomi tai polynomi, jonka aste on $< \deg u$. Yhtälön oikealla puolella on joko nollapolynomi tai polynomi, jonka aste on $\geq \deg u$. Ainoa mahdollisuus on, että yhtälön molemmat puolet ovat nollapolynomeja, ja siis $q_1 = q_2$ ja $r_1 = r_2$.

Polynomit q, *osamäärä*, ja r, *jakojäännös*, voidaan määrittää jakolaskualgoritmilla esimerkiksi jakokulmassa. Jos $r = 0$, niin v on *jaollinen* u:lla. Jos u ja v ovat rationaali- tai reaalikertoimisia, niin q ja r ovat samaa lajia. Polynomi, jolla ei ole jaollinen millään ainakin astetta 1 olevalla polynomilla, on *jaoton.*

Jakoyhtälön seurauksia ovat seuraavassa kolmessa tehtävässä todistettavat polynomien ominaisuudet. Niitä käytetään usein kilpailutehtävissä.

29*. *a) Todista että jos a on u:n nollakohta, niin u on jaollinen $(x-a)$:lla. b) Todista, että n:nnen asteen polynomilla on enintään n eri nollakohtaa. c) Todista, että jos kaksi enintään n:nnen asteen polynomia saavat samat arvot $(n+1)$:ssä eri pisteessä, polynomit ovat samat. d) Jos polynomeille u ja v pätee $u(x) = v(x)$ kaikilla reaaliluvuilla, niin u:n ja v:n kertoimet ovat samat.*

Edellisen tehtävän a-kohdan tulos on monen kilpailutehtävän ratkaisun ydin. Siitä seuraa heti, että jos polynomilla p on nollakohdat a_1, a_2, ..., a_k, niin

$$p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)q(x),$$

(missä q on polynomi) ja että polynomin nollakohtien lukumäärä ei voi ylittää polynomin astetta. – Koska $p(x) - a$ on sekin polynomi, jonka aste on sama kuin p:n, niin nähdään, että polynomi, joka ei ole vakio, voi saada arvokseen minkä hyvänsä luvun enintään asteensa ilmaiseman määrän kertoja.

30*. *Todista, että polynomi $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$ on jaollinen polynomilla $x+b+c$. Johda tästä identiteetti $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.*

Jos

$$p(x) = (x-a)^m q(x)$$

ja $q(a) \neq 0$, niin a on p:n *m-kertainen nollakohta* eli a:n *kertaluku* (p:n nollakohtana) on m. Polynomin nollakohtien kertalukujen summa on enintään polynomin aste.

Seuraavan tehtävän sisältöön (joka ei ole aivan itsestään selvä!) nojaudutaan aika monessa kilpailutehtävässä. Ominaisuutta voi hyödyntää ratkaisuissa perustelematta sitä erikseen.

31*. *Todista: jos u ja v ovat kokonaislukukertoimisia ja u:n korkeinta astetta olevan termin kerroin on 1, niin myös q ja r ovat kokonaislukukertoimisia.*

Polynomien teorian yksi kulmakivi on *algebran peruslause*. Se on olennaisesti kompleksilukuja koskeva tulos. Algebran peruslauseen todistus ei onnistu ilman muutamia sellaisia apukeinoja, jotka kuuluvat yleensä koulutietojen ulkopuolelle jääviin matemaattisen analyysin osiin, ja se joudutaan sivuuttamaan tässä. Lauseen sisältö oletetaan kuitenkin kilpailumatematiikassa tunnetuksi.

Algebran peruslause. *Jokaisella kompleksilukukertoimisella polynomilla p, jonka aste on ≥ 1, on ainakin yksi kompleksinen nollakohta.*

Aikaisempaan polynomin nollakohtien määrää koskevaan tarkasteluun yhdistettynä algebran peruslause merkitsee, että jokaisella polynomilla on, nollakohdan kertaluvut huomioon otettuna, tasan niin monta kompleksilukunollakohtaa kuin polynomin aste ilmaisee. Polynomi, jonka aste on n, on siis aina tulo

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j},$$

missä m_j on nollakohdan z_j kertaluku ja a_n on z^n:n kerroin.

Jos reaalikertoimisella polynomilla p on kompleksinen nollakohta z, on myös $0 = \overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Reaalikertoimisen polynomin kompleksinollakohdan z_0 ohella sen liittoluku $\overline{x_0}$ on myös nollakohta. Koska

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2x\mathrm{Re}z_0 + |z_0|^2,$$

nähdään, että reaalikertoiminen polynomi voidaan aina esittää ensimmäistä tai toista astetta olevien jaottomien polynomien tulona.

Eulerin kaavan perusteella nähdään helposti, että yhtälön $z^n = 1$, $n \geq 1$ kokonaisluku, juuret eli *n:nnet yksikköjuuret* ovat luvut 1, $e^{i2\pi/n}$, $e^{i4\pi/n}$, ..., $e^{i2(n-1)\pi/n}$.

32*. *Ratkaise yhtälöt $z^3 = 1$ ja $z^3 = -8$.*

Monet polynomeja käsittelevät kilpailutehtävät perustuvat siihen, että polynomin kertoimet voidaan lausua polynomin nollakohtien lausekkeina. Tämä perustuu polynomin tuloesitykseen ja numeron 29 d-kohtaan. Lausekkeita kutsutaan *Vietan*[1] *kaavoiksi*. Aikaisemmin on todettu, että jos r_1 ja r_2 ovat polynomin $x^2 + ax + b$ nollakohdat, niin $r_1 + r_2 = -a$ ja $r_1r_2 = b$. Yleisemminkin pätee, että jos r_1, r_2, ..., r_n ovat polynomin

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

juuret (useampikertaiset juuret lueteltuna kertalukunsa osoittaman määrän kertoja) ja jos S_i on summa, jonka yhteenlaskettavina ovat kaikki mahdolliset tulot, joiden tekijöinä ovat jotkin i kappaletta luvuista r_1, ..., r_n, niin $S_1 = -a_{n-1}$, $S_2 = a_{n-2}$, ..., $S_i = (-1)^i a_{n-i}$, $S_n = (-1)^n a_0$. (S_i:t ovat n:n muuttujan *symmetrisiä polynomeja*. $S_1 = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, $S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_1r_n + r_2r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n$, $S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n$ jne., $S_n = r_1r_2\cdots r_n$.)

33*. *Todista Vietan kaavat tapauksessa $n = 3$.*

Seuraava kilpailutehtävä käyttää suoraan hyödykseen Vietan kaavoja.

[1] *François Viète*, latinalaisessa muodossa *Vieta* (1540–1603), ranskalainen matemaatikko.

34. *Määritä kaikki kompleksiluvut z_1, z_2, z_3, joilla on sama itseisarvo ja joille pätee $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2z_3$* (Romanian matematiikkaolympialaiset vuonna 2009.)

Tehtävän ratkaisun aluksi huomataan, että jos lukujen yhteinen itseisarvo on a, niin $a^3 = 1$, joten $a = 1$. Silloin $z_i\overline{z}_i = 1$ ja $\overline{z}_i = \dfrac{1}{z_i} = z_jz_k$, missä j ja k ovat muut indeksit kuin i. Koska $\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3 = 1$, on $z_2z_3+z_3+z_1+z_1z_2 = 1$. Mutta Vietan kaavoista seuraa nyt, että z_1, z_2, z_3 ovat yhtälön $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$ eli $(z-1)(z^2+1) = 0$ juuret. Tämän yhtälön juuret ovat 1, i ja $-i$.

* * *

Muutama polynomi- ja yhtälöaiheinen kilpailutehtävä.

35*. *Millä b:n arvoilla yhtälöillä $1988x^2+bx+8891 = 0$ ja $8891x^2+bx+1988 = 0$ on yhteinen juuri?* (Kanadan matematiikkaolympialaiset vuonna 1988.)

On aika tavallista, että kilpailutehtävien laatijat yrittävät sovittaa kilpailun vuosiluvun, päivämäärän, järjestysnumeron tms. tehtäviin. Usein, mutta ei aina, tällaiset luvut ovat itse tehtävän ratkaisun kannalta epäolennaisia. Esimerkiksi suuruusluokkaa 2000 olevaa vuosilukua koskeva väite saattaa olla tosi kaikilla tarpeeksi suurilla kokonaisluvuilla.

36*. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6z \\ y^2 + z^2 = 6x \\ z^2 + x^2 = 6y. \end{cases}$$

(Leningradin matematiikkaolympialaiset vuonna 1990.)

37*. *Polynomille $p(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ pätee $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 4$, $p(5) = 5$ ja $p(6) = 6$. Määritä $p(7)$.* (Norjan *Niels Henrik Abel* -kilpailu vuonna 1996.)

38*. *Olkoot x_1 ja x_2 yhtälön $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ juuret. Osoita, että x_1^3 ja x_2^3 ovat yhtälön $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^2 = 0$ juuret.* (Unkarin Eötvös-kilpailu vuonna 1899.)

39*. *Todista, että jos a ja b ovat polynomin $x^4 + x^3 - 1$ kaksi nollakohtaa, niin ab on polynomin $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ nollakohta.* (Yhdysvaltain matematiikkaolympialaiset vuonna 1977.)

4.4 Epäyhtälöt

Erittäin suositun kilpailutehtävien osa-alueen muodostavat *epäyhtälöt*. Epäyhtälötehtävä voi olla epäyhtälön ratkaiseminen, ts. jonkin epäyhtälön toteuttavien muuttujanarvojen selvittäminen, mutta tavallisemmin tehtävänä on todistaa oikeaksi jokin kaikilla tiettyyn lukujoukkoon (kuten positiivisten reaalilukujen joukkoon) kuuluville luvuille oleva epäyhtälö. Epäyhtälötehtävä saattaa olla myös ääriarvotehtävä: jonkin, yleensä useamman kuin yhden muuttujan funktion ääriarvo on etsittävä. Kilpailutehtävissä kartetaan sellaisia ääriarvotehtäviä, jotka voidaan helposti ratkaista matemaattisen analyysin menetelmin, funktion derivaatan nollakohdan avulla tai (useamman muuttujan tilanteessa) ns. *Lagrangen*[1] *kertoimia* käyttämällä.

Kilpailijan on melkein välttämättä oltava perillä muutamista perusepäyhtälöistä. Useimmat näistä eivät kuulu normaaliin koulumatematiikkaan. Monen epäyhtälön takana on kuitenkin lopulta yksinkertainen havainto: $x^2 \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x. Siitä seuraa mm. sarja kahden luvun erilaisten keskiarvojen välisiä epäyhtälöitä. Nämä puolestaan ovat monen kilpatehtävän pohjana.

40. *Todista, että* $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ *kaikilla* $x \geq 0$.

Todistus on yksinkertainen: koska $0 \leq \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - 2 + \dfrac{1}{x}$, väite on tosi.

41. *Todista, että jos* $x,\ y > 0$, *niin* $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ *ja* $\sqrt{xy} = \dfrac{x+y}{2}$ *vain, kun* $x = y$.

Myös tämä on välitön seuraus binomin neliön epänegatiivisuudesta. Koska $0 \leq \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$, epäyhtälö on tosi. Yhtäsuuruus pätee vain, kun $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$ eli kun $x = y$.

Koska $\sqrt{xy}$ on x:n ja y:n *geometrinen keskiarvo* ja $\dfrac{x+y}{2}$ x:n ja y:n *aritmeettinen keskiarvo*, edellisen tehtävän sisältöä kutsutaan *aritmeettis–geometriseksi epäyhtälöksi.* Samanlainen tulos on voimassa silloinkin, kun keskiarvo on useamman kuin kahden luvun keskiarvo. Todistus on mutkikkaampi, ja siihen palataan myöhemmin.

42*. *Todista, että jos* $x,\ y > 0$, *niin*

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}.$$

Edellisen epäyhtälön vasen puoli on x:n ja y:n *harmoninen keskiarvo*; tehtävän epäyhtälö on *harmonis–geometrinen epäyhtälö*.

[1] *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813), italialais-ranskalainen matemaatikko.

43. *Todista, että kaikilla reaaliluvuilla x, y pätee* $\dfrac{x+y}{2} \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$. *Yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = y$.*

Jos epäyhtälön vasemmalla puolella on negatiivisia lukuja ja ne korvataan itseisarvoillaan, saadaan suurempi luku, mutta epäyhtälön oikea puoli ei muutu. On siis riittävää todistaa epäyhtälö oikeaksi, kun x, $y \ge 0$. Koska $(x-y)^2 \ge 0$, $x^2+y^2 \ge 2xy$ ja $2(x^2+y^2) \ge x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Kun viimeinen epäyhtälö jaetaan puolittain 4:llä ja otetaan neliöjuuret molemmista puolista, saadaan väite.

Edellisen tehtävän tulos on *aritmeettis–neliöllinen epäyhtälö.*

Esitetään vielä todistus aritmeettis-geometriselle epäyhtälölle yleisessä tapauksessa. Ehkä lyhimmin se käy, kun ensin todistetaan seuraava aputulos.

44. *Jos a ja b ovat positiivisia lukuja, niin*

$$(n-1)a^{n-1} + b^n \ge na^{n-1}b;$$

yhtäsuuruus pätee vain, kun $a = b$.

Todistetaan tämä induktiolla. Väite on tosi, kun $n = 1$. Oletetaan, että se on tosi, kun $n = k$. Induktioaskelta varten oletetaan, että $(k-1)a^k \ge ka^{k-1}b - b^k$ eli $(k-1)a^{k+1} \ge ka^kb - ab^k$. Mutta nyt

$$\begin{aligned} ka^{k+1}+b^{k+1} &\ge a^{k+1}+ka^kb-ab^k+b^{k+1} = (k+1)a^kb+a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-a^kb \\ &= (k+1)a^kb + (a-b)(a^k-b^k) \ge (k+1)a^kb. \end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö johtuu siitä, että $a-b$ ja a^k-b^k ovat samanmerkkisiä. Induktioaskel on otettu, joten väite on todistettu. Koska $(a-b)(a^k-b^k) = 0$ vain, kun $a = b$, myös yhtäsuuruusehto tulee perustelluksi.

Todistetaan nyt induktiolla aritmeettis-geometrinen epäyhtälö yleisessä muodossa. Olkoon x_1, x_2, … jono positiivisia lukuja. Olkoon

$$A_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad \text{ja} \quad G_n = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

45. *$G_n \le A_n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, ja $G_n = A_n$, jos ja vain jos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

Tiedämme, että väite pätee, kun $n = 1$ ja $n = 2$. Tehdään induktio-oletus $G_{n-1} \le A_{n-1}$. Aritmeettisen keskiarvon laskukaavan perusteella $nA_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = (n-1)A_{n-1} + x_n$. Induktio-oletus voidaan kirjoittaa muotoon

$$nA_n = (n-1)A_{n-1} + x_n \ge (n-1)G_{n-1} + x_n = (n-1)\left(G_{n-1}^{1/n}\right)^n + \left(x_n^{1/n}\right)^n.$$

Mutta nyt voidaan soveltaa aputulosta asettamalla $a_n = G_{n-1}^{1/n}$ ja $b_n = x_n^{1/n}$. Edellisen epäyhtälön oikean puolen lauseke on aputuloksen nojalla $\ge nG_{n-1}^{n-1/n}x_n^{1/n} = n(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)^{1/n} = nG_n$. Siis $nA_n \ge nG_n$ ja $G_n \le A_n$. – Yhtäsuuruusehtoa koskeva väite voidaan todistaa myös induktiolla.

Kilpatehtävissä käytetään hyödyksi myös muita yleisiä epäyhtälömalleja. Geometrian mallin mukaan epäyhtälöä

$$|x+y| \le |x| + |y|,$$

missä x ja y ovat reaalilukuja, sanotaan *kolmioepäyhtälöksi*. Kolmioepäyhtälö on helppo todistaa käymällä läpi x:n ja y:n eri merkkivaihtoehdot. (Tai voidaan vedota alaluvussa Kompleksiluvut kompleksiluvuille todistettuun kolmioepäyhtälöön.) Induktiolla voidaan sitten helposti todistaa oikeaksi yleinen kolmioepäyhtälö

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Yksi epäyhtälötyyppi, johon usein vedotaan, on *Cauchyn*[1], *Schwarzin*[2] eli *Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö*. Se ilmoittaa kahden yhtä pitkän reaalilukujonon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ alkioista muodostetun tulon suuruuden ylärajan:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n)^2(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Epäyhtälön helpoin todistus syntyy yllättäen toisen asteen polynomin ominaisuuksista. Kaikilla reaaliluvuilla t pätee nimittäin $(x_kt - y_k)^2 \ge 0$, joten

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}(x_kt-y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2t^2-2x_ky_kt+y_k^2) = t^2\sum_{k=1}^{n}x_k^2-2t\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}y_k^2.$$

Mutta toisen asteen polynomilla on enintään yksi nollakohta vain, jos sen diskriminantti on ≤ 0. Kun tämä ehto kirjoitetaan auki yllä olevalle toisen asteen polynomille, saadaan heti todistettava epäyhtälö. Lisäbonuksena tulee yhtäsuuruusehto: polynomi saa arvon 0 jollain t:n arvolla jos ja vain jos jokainen termi $x_kt - y_k = 0$ eli jokainen suhde $\dfrac{y_k}{x_k}$ on vakio.

Epäyhtälötehtävissä malliepäyhtälöiden soveltamiseen liittyy usein se lisävaikeus, että niissä esiintyvät lukujonot eivät näy suoraan tehtävänannossa, vaan ne on ”keksittävä”.

46. *Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

(Pohjoismainen matematiikkakilpailu vuonna 1987.)

---

[1] *Augustin-Louis Cauchy* (1789–1857), ranskalainen matemaatikko.
[2] *Hermann Amandus Schwarz* (1843–1921), saksalainen matemaatikko.

Tehtävän ratkaisu käyttää hyväksi sekä aritmeettis–geometrista epäyhtälöä että Cauchyn epäyhtälöä. Edellisen mukaan

$$3 = 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{c^2}\frac{c^2}{a^2}} \le \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

eli

$$\sqrt{3} \le \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \tag{1}$$

Jälkimmäistä epäyhtälöä varten tarkastellaan jonoja $(x_1,\, x_2,\, x_3) = (1,\, 1,\, 1)$ ja $(y_1,\, y_2,\, y_3) = \left(\frac{a}{b},\, \frac{b}{c},\, \frac{c}{a}\right)$. Cauchyn epäyhtälön mukaan

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{a}{b} + 1 \cdot \frac{b}{c} + 1 \cdot \frac{c}{a}\right)^2 \le (1^2 + 1^2 + 1^2)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Siis

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \tag{2}$$

Kun (1) ja (2) yhdistetään, saadaan väite. – Tehtävässä ei kysytty, milloin epäyhtälö muuttuu yhtälöksi, mutta edellä mainittuja yhtäsuuruuskriteerejä soveltaen nähdään helposti, että yhtäsuuruus vallitsee vain, jos $a = b = c$.

Eräs yksinkertainen ja kilpailutehtävissä toisinaan vastaan tuleva epäyhtälötyyppi on *suuruusjärjestysepäyhtälö*. Samoin kuin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälössä, nytkin on kyse kahden jonon termien pareittaisten tulojen summista.

47. *Olkoon* $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ *ja* $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ *reaalilukuja. Jos* $c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n$ *on jokin lukujen* $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ *permutaatio, niin*

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \le a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Väitteen todistamiseksi tarkastellaan keskimmäisen summan kahta yhteenlaskettavaa a_kc_k ja a_mc_m, $k < m$. Nyt $a_kc_k + a_mc_m - (a_kc_m + a_mc_k) = (a_k - a_m)(c_k - c_m)$. Koska $a_k \le a_m$, niin erotus on ei-negatiivinen, jos $c_k \le c_m$ ja ei-positiivinen, jos $c_k \ge c_m$. Keskimmäistä tuloa voidaan suurentaa vaihtamalla kahden "väärässä järjestyksessä" olevan c-termin paikkaa ja pienentää vaihtamalla kahden "oikeassa järjestyksessä" olevan c-termin paikkaa. Suurentamisia ja pienentämisiä voidaan tehdä, kunnes päädytään epäyhtälön oikean tai vasemman puolen mukaisiin järjestyksiin.

48. *Olkoon* $\{a_k\}$, $k = 1,\, 2,\, \ldots$, *jono keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että kaikilla* n *pätee*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1978.)

Tämä tavallaan korkeimman tason matematiikkakilpailun tehtävä on sangen helppo ratkaista. Jos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ovat luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan, niin $k \le b_k$ kaikilla k. Kun käytetään suuruusjärjestysepäyhtälöä, saadaan heti

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Kilpailumatematiikan koneistoon saattavat kuulua vielä mm. *Tšebyševin*[1] ja *Jensenin*[2] epäyhtälöt. Vaikka näihin aika harvoin joudutaan vetoamaan, todistetaan molemmat.

Tšebyševin epäyhtälössä on kysymys kahdesta samoin järjestetystä lukujonosta:

49. *Olkoon* $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ *ja* $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. *Silloin*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \le \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

Tšebyševin epäyhtälö seuraa suuruusjärjestysepäyhtälöstä. Sen mukaan voidaan seuraavat yhtälö ja $n-1$ epäyhtälöä pitävät paikkansa:

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\ge a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\ge a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2,\\
&\vdots\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\ge a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Epäyhtälöiden vasempien puolien summa on $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$ ja oikeilta puolista kertyvät kaikki tulon $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ n^2 eri termiä. Kun summat jaetaan n^2:lla, saadaan Tšebyševin epäyhtälö.

Jensenin epäyhtälö liittyy mielivaltaisiin funktioihin, jotka ovat *konvekseja*. Reealilukuvälillä $[a, b]$ määritelty funktio f on konveksi, jos kaikilla välin $[a, b]$ pisteillä x ja y, $x < y$, ja kaikilla p, $0 < p < 1$, pätee

$$f(px + (1-p)y) \le pf(x) + (1-p)f(y).$$

Geometrisesti konveksisuus merkitsee, että funktion f kuvaaja ei välillä $[x, y]$ nouse pisteiden $(x, f(x))$ ja $(y, f(y))$ kautta kulkevan suoran yläpuolelle. Voidaan osoittaa, että jos funktiolla f on derivaatta f', niin f on konveksi, jos ja vain jos f' on kasvava; jos funktiolla on myös toinen derivaatta f'', niin f on konveksi, jos f'' on kaikkialla ei-negatiivinen.

---

[1] *Pafnuti Lvovitš Tšebyšev* (1821–84), venäläinen matemaatikko.

[2] *Johan Ludwig Jensen* (1859–1925), tanskalainen puhelininsinööri ja amatöörimatemaatikko.

Jensenin epäyhtälö ilmaisee, että konveksin funktion arvo joidenkin pisteiden painotetussa keskiarvossa on pienempi kuin funktion näissä pisteissä saamien arvojen samoin painotettu keskiarvo.

50. *Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat ei-negatiivisia lukuja, joiden summa on 1 ja jos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat mielivaltaisia välin $[a, b]$ pisteitä, niin*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k). \tag{1}$$

Todistetaan Jensenin epäyhtälö induktiolla. Kun $n = 2$, epäyhtälö on sama kuin konveksin funktion määritelmä. Todistukseen tarvitaan siis vain induktioaskel n:stä $n+1$:een. Oletetaan siis, että (1) pätee ja että $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = 1$. Voidaan olettaa, että $a_{n+1} > 0$. Nyt

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k = a_{n+1}x_{n+1} + (1 - a_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} x_k,$$

joten konveksisuuden määritelmän perusteella

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k\right) \le a_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - a_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} x_k\right). \tag{2}$$

Mutta oikean puolen summalle pätee induktio-oletuksen mukaan

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} f(x_k). \tag{3}$$

Kun (2) ja (3) yhdistetään, saadaan Jensenin yhtälö arvolla $n+1$ eli induktioaskel otetuksi ja todistus valmiiksi.

Funktion f ja pisteiden x_j sekä painikertoimien a_j valinnoissa on monia mahdollisuuksia, ja niinpä Jensenin epäyhtälöön voidaan palauttaa moni muu erisuuruusrelaatio.

51*. *Todista Jensenin epäyhtälön avulla aritmeettis–geometrinen epäyhtälö. Voit valita $f(x) = e^x$.*

Jensenin epäyhtälön avulla voidaan todistaa myös vaikeammissa kilpailutehtävissä joskus tarvittava *potenssikeskiarvoepäyhtälö*.

52*. *Todista, että jos $0 < s < t$, p_k, x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ ovat positiivisia lukuja ja $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, niin*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^s\right)^{1/s} \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t\right)^{1/t}.$$

* * *

Muutama epäyhtälöaiheinen kilpailutehtävä:

53*. *Olkoot a, b, c, d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

(Leningradin matematiikkaolympialaiset vuonna 1988.)

54*. *Olkoon $c>0$ ja $a>c$, $b>c$. Todista, että*

$$\sqrt{ab}\geq\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}.$$

(Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 1983.)

55*. *a) Määritä lausekkeen x^2y-y^2x suurin arvo, kun $0\leq x\leq 1$ ja $0\leq y\leq 1$. b) Määritä lausekkeen $x^2y+y^2z+z^2x-x^2z-y^2x-z^2y$ suurin arvo, kun $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ ja $0\leq z\leq 1$.* (Ison-Britannian matematiikkaolympialaiset vuonna 1995.)

56*. *Olkoot x_i, y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ reaalilukuja, joille pätee $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$ ja $y_1\geq y_2\geq\ldots\geq y_n$. Todista, että jos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ on lukujen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mielivaltainen permutaatio, niin*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

(Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1975.)

57*. *Positiivisille reaaliluvuille a, b, c pätee $abc\geq 1$. Todista, että*

$$ab+bc+ca\leq a^3+b^3+c^3.$$

(Ukrainan matematiikkaolympialaiset vuonna 2004.)

4.5 Funktionaaliyhtälöt

Kun tehtävänä on ratkaista tavallinen yhtälö (tai yhtälöryhmä), niin etsittävänä on luku tai joukko lukuja, jotka yhtälön tuntemattoman tai tuntemattomien paikalle sijoitettuna tekevät yhtälöstä identtisen eli toteuttavat yhtälön. *Funktionaaliyhtälötehtävässä* tuntematon ei ole luku, vaan funktio. Siitä kerrotaan joitain asioita, yleensä myös jokin yhtälö, jossa funktio on mukana, ja näiden tietojen perusteella on pääteltävä, mistä funktiosta on kyse. Usein funktion määrittelyjoukolla on merkitystä. – Funktiota määrittävä ehto voi toki olla myös epäyhtälö.

Funktionaaliyhtälötehtävän (niin kuin tavallisenkin yhtälötehtävän) ratkaisu etenee yleensä niin, että tehtävässä annetuista tiedoista johdetaan ratkaisufunktiolle sitä rajaavia ehtoja, kunnes ratkaisukandidaattien määrä on riittävän pieni. On kuitenkin edelleen mahdollista, että saadut ratkaisukandidaatit eivät sittenkään toteuta kaikkia tehtävän ehtoja. Funktionaaliyhtälötehtävän täydellisessä ratkaisussa on lopuksi selvitettävä, toteuttavatko saadut ratkaisut todella tehtävän ehdot.

Funktionaaliyhtälötehtäville ei voi esittää mitään kaikkiin tapauksiin kelpaavaa ratkaisualgoritmia. Lähes aina kannattaa kokeilla, mitä tapahtuu, kun yhtälöön sijoitetaan "helppoja" argumentin arvoja, kuten 0 tai 1, miten käy, kun x:n paikalle sijoittaa $-x$:n, tai jos argumentteja on useita, mitä tapahtuu, jos antaa molemmille saman arvon. Toisinaan on hyödyksi pyrkiä osoittamaan, että funktiolla on jokin erityinen ominaisuus kuten *injektiivisyys* tai *surjektiivisuus*. Edellinen tarkoittaa sitä, että funtio saa eri argumenttien arvoilla aina eri arvon, jälkimmäinen sitä, että funktion saamien arvojen joukossa ovat kaikki muuten mahdolliset arvot.

Funktionaaliyhtälöiden klassikko on *Cauchyn funktionaaliyhtälö*. Sen ratkaisu on helppo, kun funktion määrittelyjoukoksi rajataan rationaalilukujen joukko. Samaa strategiaa noudattavat useat muut funktionaaliyhtälötehtävän ratkaisut.

58. *Määritä funktiot $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, joille pätee*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$.

Cauchyn yhtälön ratkaisuvaiheet ovat useille funktionaaliyhtälötehtäville tyypillisiä. Funktion ominaisuuksia rajataan ehtoa (1) ja erityisiä x:n ja y:n valintoja käyttämällä. Ensin sijoitetaan yhtälöön $x = y = 0$, jolloin se saa muodon $f(0) = 2f(0)$. Tämä merkitsee, että $f(0) = 0$. Sitten sijoitetaan $y = -x$, jolloin nähdään, että $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$. Siis $f(-x) = -f(x)$ kaikilla x. Induktiolla nähdään helposti, että $f(nx) = nf(x)$ kaikilla positiivisilla n, ja jos n on negatiivinen kokonaisluku, niin myöskin $f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)f(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$. Olkoon $f(1) = k$. Silloin havaitaan, että $k = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, joten $f\left(\frac{1}{n}\right) = k \cdot \frac{1}{n}$. Edelleen $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot k \cdot \frac{1}{n} = k \cdot \frac{m}{n}$. Näin on saatu mahdollisiksi ratkaisufunktioiksi vain funktiot $f(x) = kx$, missä k on mielivaltainen rationaaliluku. Toisaalta jokainen tällainen funktio f varmasti toteuttaa yhtälön (1), joten tehtävä on ratkaistu.

Jos Cauchyn yhtälössä funktion arvo- ja määrittelyjoukkona on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, ratkaisufunktioiden joukkoon tulee mukaan suuri määrä varsin eksoottisia funktioita. Monet lisärajoitukset, kuten että f on monotoninen, ainakin 0:ssa jatkuva tai ainakin jollakin välillä rajoitettu, jättävät jäljelle vain ratkaisun $f(x) = kx$.

Funktionaaliyhtälötehtävässä etsittävän funktion arvo saattaa esiintyä myös funktion argumenttina.

59. *Etsi kaikki funktiot* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, joille*

$$f(x) + f(y) = f(f(x)f(y))$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. (Baltian Tie -joukkuematematiikkakilpailu vuonna 1999.)

Kuten monissa funktionaaliyhtälötehtävässä, tässäkin nähdään heti, että vakiofunktio $f(x) = 0$ on eräs ratkaisu. Nyt käy niin, että muita ratkaisuja ei löydykään. Tämän osoittamiseksi valitaan mielivaltainen luku a. Olkoon $b = f(a)$. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = y = a$, saadaan $2b = f(b^2)$. Kun yhtälöön sijoitetaan $x = y = b^2$, saadaan $4b = f(4b^2)$. Sijoitetaan nyt yhtälöön $x = a$ ja $y = 4b^2$. Saadaan $5b = f(b \cdot 4b) = f(4b^2)$. Mutta nyt onkin $4b = 5b$ eli $b = 0$. Koska a valittiin mielivaltaisesti, ainoa mahdollinen ratkaisu on $f(x) = 0$ kaikilla x.

* * *

Seuraavien funktionaaliyhtälötehtävien ratkaisuissa tulevat vastaan muutamat ratkaisutekniikat. Yksi näistä on funktion mahdollisen *injektiivisyyden* hyödyntäminen. Funktio on f *injektio*, jos se saa kunkin arvonsa vain yhdellä argumentin arvolla, ts. jos ehdosta $f(x) = f(y)$ aina seuraa $x = y$. Alla oleva Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävä on tällaisesta esimerkki.

60*. *Määritä kaikki funktiot* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, joille pätee*

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. (Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 2000.)

61*. *Osoita, että on olemassa tasan yksi joukossa* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *määritelty funktio* f*, joka toteuttaa ehdot*

(i) $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ *kaikilla* $x \neq 0$*;*

(ii) $f(x)+f(y) = 1+f(x+y)$ *kaikilla nollasta eroavien reaalilukujen pareilla* (x, y)*, missä* $x \neq -y$. (Australian matematiikkaolympialaiset vuonna 1991.)

62*. *Määritä kaikki funktiot* $f : [0, 1]\times[0, 1] \to [0, 1]$*, joille pätee* $f(x, 1) = x$*,* $f(1, y) = y$*,* $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ *ja* $f(zx, zy) = z^k f(x, y)$ *kaikilla* $x, y, z \in [0, 1]$*.* k *on positiivinen vakio, joka ei riipu luvuista* x*,* y *ja* z*.* (Kiinan matematiikkaolympialaiset vuonna 1990.)

63*. *Olkoon* $\mathbb{Q}^+$ *positiivisten rationaalilukujen joukko. Määritä funktio* $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ *siten, että*

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{Q}^+$. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1990.)

5 Kombinatoriikka

Kombinatoriikka matematiikan alana tarkoittaa alkeellisessa mielessä menetelmiä, joilla voidaan laskea äärellisten joukkojen alkioiden lukumääriä tai ainakin johtaa keinoja kaikkien joukon alkioiden luettelemiseksi. Tarve tällaisille menetelmille on lähtenyt paljolti todennäköisyyslaskennasta, tilanteista, joissa on tarpeen laskea jonkin ehdon toteuttavien alkeistapausten määrä. Kilpailumatematiikassa kombinatoriikkaa ovat tällaisten laskutehtävien lisäksi esimerkiksi tehtävät, joissa selvitetään mahdollisuuksia värittää jonkin kuvion osia tiettyjen ehtojen mukaisesti tai toisen tai toisen pelaajan mahdollisuuksia taata itselleen voitto jossain tiettyjä sääntöjä noudattavassa pelissä.

5.1 Laskennallinen kombinatoriikka

Laskennallisen kombinatoriikan perusajatuksia on *tulosääntö*. Sen voi ajatella toiminnallisesti. Jos jokin toimi T on jaettavissa peräkkäisiin osatoimiin, T_1, T_2, $\ldots$, T_k ja toimi T_1 voidaan suorittaa n_1:llä eri tavalla, toimi T_2 n_2:lla eri tavalla jne., niin erilaisia vaihtoehtoja suorittaa toimi T on kaikkiaan $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ kappaletta. Toimi T voi olla esimerkiksi n:n eri henkilön asettaminen jonoon. Jonon ensimmäinen voidaan valita n:llä eri tavalla, sen jälkeen jonon toinen $n-1$:llä eri tavalla (koska jo valittu ensimmäinen henkilö ei ole enää vaihtoehtona mukana), jonon kolmas $n-2$:lla eri tavalla jne. Eri jonoja tulee siten

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-(k+1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

eri kappaletta. Jos $k = n$, saadaan kaikkien n:stä alkiosta muodostettujen jonojen lukumäärä $n!$. Kutakin joukon $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ alkioista muodostettua järjestettyä jonoa $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ sanotaan joukon A *permutaatioksi*. n-alkioisella joukolla on siis $n!$ eri permutaatiota.

Tulosäännön perusteella on selvää, että jos samaa alkiota voi käyttää useamman kerran, niin n:stä alkiosta voidaan muodostaa k:n alkion pituisia jonoja n^k kappaletta. Samoin, jos A on k:n alkion joukko $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ja B n:n alkion joukko $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, niin funktioita $f : A \to B$ on n^k kappaletta. Tällainen funktiohan syntyy k:n valinnan tuloksena, ja jokaisessa valinnassa on n vaihtoehtoa.

64. *Osoita, että jos joukossa A on n alkiota, niin joukolla A on 2^n osajoukkoa (tyhjä joukko ja joukko A itse mukaan luettuina).*

Jokainen osajoukko voidaan nimittäin muodostaa n:ssä vaiheessa käymällä läpi A:n alkiot yksi kerrallaan ja valitsemalla kunkin alkion kohdalla, kuuluuko alkio kyseiseen osajoukkoon vai ei. Erilaisia osajoukkoja voidaan tuloperiaatteen nojalla muodostaa

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ kpl.}} = 2^n$$

kappaletta.

Tulosäännön ohella usein käytettävä kombinatorinen periaate on saman lukumäärän laskeminen kahdella eri tavalla ja tästä tehtävät jatkopäätelmät.

65. *Jos joukossa on n alkiota, sillä on $\binom{n}{k}$ k-alkioista osajoukkoa.*

Asia voidaan perustella esimerkiksi niin, että jos tällaisia osajoukkoja on x kappaletta, niin tuloperiaatteen nojalla erilaisia k:n alkion jonoja on $x \cdot k!$ kappaletta. Jonoja on toisaalta $\frac{n!}{(n-k)!}$ kappaletta, joten

$$x = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Kombinatorisin päättelyin voidaan perustella monet binomikertoimia koskevat identiteetit. Pari yksinkertaista esimerkkiä:

66*. *Osoita, että*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

67*. *Osoita, että*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p},$$

kun $p \leq m$, n.

Toisinaan kilpailutehtävien ratkaisussa on hyötyä *inkluusion ja ekskluusion periaatteesta*. Se on menetelmä usean joukon yhdisteen alkioiden lukumäärän laskemiseksi, kun joukoilla voi olla yhteisiä alkioita. Merkitään joukon X alkioiden lukumäärää symbolilla $|X|$. Jos A ja B ovat joukkoja, joiden leikkaus $A \cup B$ ei ole tyhjä, niin ilmeisesti yhdisteen $A \cup B$ alkioiden lukumäärä saadaan lasketuksi laskemalla yhteen A:n ja B:n alkioiden lukumäärä ja vähentämällä tässä kahteen kertaan lasketut $A \cap B$:n alkiot: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Kun joukkoja on useita, inkluusion ja ekskluusion periaate on hiukan mutkikkaampi.

68. *Osoita, että*

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{1 \le i < j < m \le n} |A_i \cap A_j \cap A_m| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Melko vaikeasti hahmottuvan kaavan (1) perustelemiseksi tarkastellaan jonkin alkion x, joka esiintyy tasan k:ssa, $k \ge 1$, joukoista A_i, kontribuutiota yhtälön (1) eri puolille. Vasemmalle puolelle alkio antaa kontribuution 1: se on yksi yhdisteen alkioista. Oikean puolen ensimmäiseen summaan alkio tuottaa luvun k, toiseen summaan luvun $\binom{k}{2}$, sillä x on mukana kaikissa sellaisissa pareissa A_i, A_j, joissa sekä A_i että A_j ovat niiden k:n osajoukon joukossa, joihin x kuuluu. Vastaavasti kolmas summa tuottaa luvun $\binom{k}{3}$ jne. Viimeinen summa, josta x tuottaa positiivisen kontribuution on se, jossa käydään läpi k:n osajoukon leikkaukset. Tähän summaan kontribuutio on 1 eli $\binom{k}{k}$. Mutta

$$
\begin{aligned}
k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots + (-1)^{k-1} &= 1 - \left(1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k}\right) \\
&= 1 - (1-1)^k = 1.
\end{aligned}
$$

Alkion kontribuutio summan molemmille puolille on siis sama. Koska x on mielivaltainen, yhtälö (1) on voimassa.

* * *

Muutama laskennollista kombinatoriikkaa sivuava kilpailutehtävä.

69*. *Luokassa, jossa on 46 oppilasta, oppilaat muodostavat kolmen oppilaan ryhmiä. Jokaisessa kahdessa eri ryhmässä on enintään yksi yhteinen jäsen. Osoita, että luokassa on ainakin 10 oppilaan joukko, johon yksikään muodostetuista ryhmistä ei sisälly kokonaan.* (Aasian ja Tyynenmeren matematiikkaolympialaiset vuonna 2008.)

70*. *Seitsemän Kääpiötä päättivät osallistua Millennium-tietokilpailuun neljällä joukkueella. Monellako tavalla joukkueet voidaan muodostaa, kun kaikki kääpiöt haluavat olla mukana? Entä jos Lumikkikin tulee mukaan?* (Ison-Britannian matematiikkaolympialaiset vuonna 1999.)

71*. *Joukossa S on n alkiota. Olkoon k positiivinen kokonaisluku ja $A_1, A_2, \ldots, A_k$ joukon S eri osajoukkoja. Olkoon B_i joko A_i tai $S \setminus A_i$. Määritä pienin k, jolle B_i:t voidaan valita niin, että niiden yhdiste on S.* (Brasilian matematiikkaolympialaiset vuonna 2003.)

72*. *Osoita, että äärellisen positiivisten kokonaislukujen joukon alkioiden geometrinen keskiarvo on sama kuin joukon kaikkien osajoukkojen alkioiden geometristen keskiarvojen geometrinen keskiarvo.* (Kanadan matematiikkaolympialaiset vuonna 1982.)

5.2 Laatikkoperiaate

Monen kilpailutehtävän ratkaisun ytimenä on seuraava yksinkertainen havainto: jos on sijoitettava $n+1$ esinettä n:ään laatikkoon, niin ainakin yhteen laatikkoon on sijoitettava ainakin kaksi esinettä. Hiukan yleistettynä: jos $kn+1$ esinettä sijoitetaan n:ään laatikkoon, ainakin yhdessä laatikossa on ainakin $k+1$ esinettä. Tehtävästä riippuu, mikä tulkinta annetaan "esineelle" ja mikä "laatikolle". Valaistaan asiaa muutamien esimerkkitehtävien avulla.

73. *Neliön sivu on 3. Osoita, että jos neliöön sijoitetaan 10 pistettä, niin joidenkin kahden pisteen keskinäinen etäisyys on enintään $\sqrt{2}$.*

Neliö tarjoaa helposti yhdeksän laatikkoa: sehän voidaan jakaa yhdeksäksi yhteneväksi neliöksi. Näiden neliöiden sivu on 1. Jotkin kaksi kymmenestä pisteestä ovat samassa laatikossa eli samassa pikkuneliössä. Niiden etäisyys toisistaan on enintään yhtä suuri kuin neliön lävistäjä $\sqrt{2}$.

74. *Kutsuilla jotkut vieraat kättelevät toisiaan. Osoita, että vieraiden joukossa on ainakin kaksi, jotka ovat kätelleet täsmälleen yhtä monta vierasta.*

Laatikkoja ovat nyt yksittäisen vieraan kättelemien vieraiden lukumäärät. Jos kutsuilla on n vierasta, niin yksittäisen vieraan kättelemien vieraiden lukumäärä on jokin luvuista $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Jos joku vieraista on kätellyt kaikkia muita, 0 ei ole mahdollinen lukumäärä. Jos taas kukaan ei ole kätellyt kaikkia muita, $n-1$ ei ole mahdollinen lukumäärä. Joka tapauksessa n:n vieraan kättelemien muiden vieraiden lukumäärällä on vain $n-1$ mahdollista arvoa, joten ainakin kahden vieraan kättelemien henkilöiden lukumäärän on oltava sama.

75. *Osoita, että kymmenen kaksinumeroisen positiivisen kokonaisluvun joukolla on kaksi erillistä osajoukkoa, joiden alkioiden summa on sama.* (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1972.)

Laatikkoja ovat nyt summan eri mahdolliset arvot. Joukolla on $2^{10} = 1024$ osajoukkoa. Jokaisen osajoukon alkioiden summa on pienempi kuin $10 \cdot 100 = 1000$. Joillakin kahdella osajoukolla on siis sama alkioiden summa. Kun molemmista osajoukoista poistetaan mahdolliset yhteiset alkiot, jää jäljelle kaksi erillistä joukkoa, joiden alkioiden summa on edelleen sama.

Laatikkoperiaate on erityisen tavallinen lukuteoreettisten tehtävien ratkaisuissa. Näitä kohdataan luvussa Lukuteoria.

* * *

Tehtäviä, joissa laatikkoperiaatteella on osuutta:

76*. *Lukujen* 1, 2, ..., 1997 *joukosta valitaan 1001 kappaletta. Osoita, että valittujen lukujen joukossa on ainakin kaksi sellaista, joiden erotus on 4.* (Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 1997.)

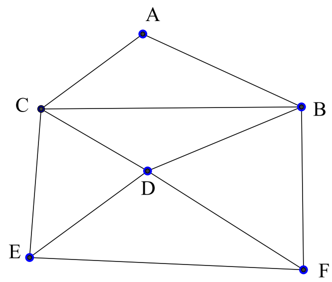
77*. *Pyöreän pöydän ympärillä istuu 25 tyttöä ja 25 poikaa. Osoita että ainakin jonkin pojan tai tytön molemmilla puolilla istuu tyttö.* (Saksan matematiikkaolympialaiset vuonna 2006.)

78*. 4×7*-ruudukon jokainen ruutu on valkea tai musta. Osoita, että ruuduista voidaan muodostaa suorakaide, jonka kaikki neljä kulmaruutua ovat samanväriset.* (Yhdysvaltojen matematiikkaolympialaiset vuonna 1976.)

79*. *Olkoon 19 palloa sijoitettuina umpimähkään 95:een laatikkoon. Sijoitetaan kuusi uutta palloa laatikkoihin, kukin eri laatikkoon. Voidaanko tätä operaatiota toistamalla päästä tilanteeseen, jossa joka laatikossa on yhtä monta palloa?* (Baltian Tie -joukkuematematiikkakilpailu vuonna 1995.)

5.3 Verkot ja pelit

Monia kilpatehtävissäkin esiintyviä rakenteita voidaan käsitellä yhtenäisellä tavalla *verkon* käsitteen avulla. Matemaattisena objektina verkko muodostuu joukosta V, jonka jäseniä kutsutaan *solmuiksi* ja joukosta V:n alkioiden pareja, joita kutsutaan *särmiksi*. Solmuja voi havainnollistaa pisteillä tai pallukoilla, ja särmiä viivoilla, jotka yhdistävät niitä solmuja, jotka parina särmän määrittelevät. Syntyvän kuvion muodolla ei ole merkitystä, tärkeätä on vain se, minkä solmujen välissä on särmä ja minkä ei.



Jos särmistä muodostetaan jono, jossa kahdella peräkkäisellä särmällä on yhteinen solmu, syntyy verkon *polku*. Verkko on *yhtenäinen*, jos sen jokaiset kaksi solmua voidaan yhdistää polulla. Verkko on *täydellinen*, jos jokaisen kahden solmun välissä on särmä. Solmun *aste* ilmoittaa, kuinka moneen särmään solmu kuuluu. Esimerkiksi oheisen kuvan verkon solmun A aste on 2 ja solmun B aste on 4. Parit voivat olla järjestettyjä; tällöin puhutaan *suunnatusta verkosta*. (Tehtävässä 16 on kysymys suunnatusta verkosta.) – Tehtävät, joiden pohjana on jokin verkkojen rakenneominaisuus, muotoillaan usein esimerkiksi niin, että verkon solmua pannaan vastaamaan ihminen ja särmää vaikkapa se, että kaksi ihmistä ovat tuttavia.

Klassinen verkon ominaisuuksiin ja laatikkoperiaatteeseen liittyvä tehtävä on seuraava. Se on samalla alkeellinen tapaus ns. *Ramseyn*[1] *teorian* kysymyksistä, joiden versoita esiintyy kilpailutehtävissä.

[1] *Frank Ramsey* (1903–30), englantilainen matemaatikko.

80. *Osoita, että kuuden henkilön joukossa on aina kolme, jotka tuntevat toisensa tai kolme, jotka eivät tunne toisiaan.*

Jos tehtävä muunnetaan verkkojen kielelle, se voidaan lausua esimerkiksi niin, että kuusisolmuisen täydellisen verkon särmät voidaan värittää kahdella värillä niin, että syntyy kolmio, jonka kaikki sivut ovat samanvärisiä tai niin, että jos verkossa on kuusi solmua, siinä on aina joko kolme sellaista solmua, että kaikkia yhdistää särmä tai kolme sellaista solmua, että niistä mitään kahta ei yhdistä särmä. Valitaan solmuista yksi, sanokaamme A. Muista viidestä solmusta jotkut ehkä yhdistyvät särmällä A:han, toiset eivät. Oletetaan, että edellisiä on enemmän; niitä on silloin ainakin kolme, sanokaamme B, C, D. Jos näiden välissä ei ole yhtään särmää, $\{B, C, D\}$ on tehtävässä haettu kolmikko. Jos jonkin kahden, esimerkiksi B:n ja C:n välillä on särmä, $\{A, B, C\}$ on haluttu kolmikko. – Jos niitä solmuja, jotka eivät yhdisty A:han, on ainakin kolme, päättely sujuu analogisesti.

Jotkin verkkoteorian perustulokset saattavat tulla käyttöön kilpatehtävissä. Lähes triviaali on seuraava solmujen asteisiin liittyvä tulos.

81. *Verkon paritonasteisten solmujen lukumäärä on parillinen.*

Verkon kaikkien solmujen asteiden summa on nimittäin kaksi kertaa solmun särmien lukumäärä ja siis parillinen, mistä väite heti seuraa. Esimerkiksi seuraava vanha tehtävä on ilmeinen sovellus:

82. *Todista, että ei ole mahdollista yhdistää 77 puhelinta toisiinsa niin, että jokainen puhelin on yhdistetty tasan 15 muuhun.* (DDR:n matematiikkaolympialaiset vuonna 1965.)

Jos tällainen puhelinverkko olisi, siinä olisi 77 solmua ja jokaisen aste olisi 15.

Yhtenäisen verkon *Eulerin polku* on sellainen polku, joka sisältää kaikki verkon särmät. Jos verkossa on Eulerin polku, se "tulee ja lähtee" joka solmusta, ehkä useamminkin. Jokaisen solmun asteen on tällöin oltava parillinen. Tämä parillisuus on myös riittävä ehto sille, että verkossa olisi Eulerin polku.

83. *Jos yhtenäisen verkon kaikkien solmujen aste on parillinen, siinä on Eulerin polku.*

Jos nimittäin lähdetään solmusta A ja pyritään muodostamaan mahdollisimman monta särmää käsittävä polku, niin prosessi voi päättyä vain solmuun A. Ellei syntynyt polku p sisällä kaikkia verkon särmiä, on jokin solmu B, jonka kautta p ei kulje. Koska verkko on yhtenäinen, jokin polku yhdistää B:n A:n. Tämä polku koskettaa p:tä ensi kerran solmussa C (joka voi olla A). Aletaan muodostaa C:stä polkua p', jonka särmät eivät ole mukana polussa p. Koska p on "kuluttanut" kunkin solmun astetta parillisen määrän, p':n päätepiste voi olla vain C. Polku, jossa kuljetaan p:tä pitkin A:sta C:hen, sitten p' ja edelleen p:tä pitkin C:stä A:han, on p:tä useammasta särmästä koostuva polku. Ellei tämä jo sisällä kaikkia verkon särmiä, päättely voidaan toistaa. Koska särmiä on äärellinen määrä, jossain vaiheessa päädytään Eulerin polkuun.

* * *

Muutama verkkohenkinen kilpailutehtävä:

84*. *Erään maan kaupunkien välillä voi matkustaa bussilla, junalla tai lentokoneella. Kaikkia näitä välineitä käytetään, mutta mihinkään kaupunkiin ei pääse kaikilla kolmella tavalla. Myöskään mitään kolmea kaupunkia ei yhdistä sama liikennemuoto. Montako kaupunkia maassa voi enintään olla?* (USA:n matematiikkaolympialaiset vuonna 1981.)

85*. *Kutsuilla on n vierasta $P_1, P_2, \ldots, P_n$. P_1 on tuttu neljän vieraan kanssa, P_2 viiden jne. Vieras P_{n-6} tuntee $n-3$ muuta, vieraan P_{n-5}, P_{n-4} ja P_{n-3} tuntevat $n-2$ vierasta ja P_{n-2}, P_{n-1} sekä P_n tuntevat $n-1$ vierasta. Selvitä, millä $n \geq 8$ tämä on mahdollista.* (Itävallan ja Puolan matematiikkamaaottelu vuonna 1985.)

86*. *Kutsumme n-m-*seuraksi *joukkoa, jossa on n tyttöä ja m poikaa. Osoita, että on olemassa luvut n_0 ja m_0 niin, että jokaisessa n_0-m_0-seurassa on viiden pojan ja viiden tytön muodostama joukko, jolla on seuraava ominaisuus: joko kaikki pojat tuntevat kaikki tytöt tai yksikään pojista ei tunne yhtäkään tytöistä.* (Unkarin ja Israelin matematiikkamaaottelu vuonna 1994.)

87*. *Tanssiaisissa jokainen herra on tanssinut ainakin yhden daamin kanssa ja jokainen daami ainakin yhden herran kanssa. Kukaan herra ei ole tanssinut kaikkien daamien eikä kukaan daami kaikkien herrojen kanssa. Osoita, että tanssiaisissa on kaksi herraa ja kaksi daamia niin, että kumpikin herroista on tanssinut toisen daamin muttei molempien kanssa ja kumpikin daami on tanssinut toisen heran, muttei molempien kanssa.* (DDR:n matematiikkaolympialaiset vuonna 1968.)

* * *

Suositun kombinatorisluontoinen tehtävänaiheen muodostavat *pelit*, joissa yksi tai useampi pelaaja toimii kulloisenkin pelin sääntöjen (jotka voivat kyllä olla varsin omituiset ja keinotekoiset) mukaan. Kysymys on usein siitä, voiko joku pelaaja pelata niin, että hän pystyy takaamaan itselleen voiton riippumatta siitä, miten muut pelaajat toimivat. Tällaisessa tilanteessa sanotaan, että pelaajalla on *voittostrategia*.

88. *Kasassa on 500 tikkua. Pelaajat A ja B poistavat kasasta tikkuja vuorotellen, A aloittaa. Poistettavien tikkujen määrä on aina jokin 2:n potenssi (siis 1, 2, 4, 8, ...). Pelaaja, joka saa viimeisen tikun, voittaa. Onko jommallakummalla pelaajalla voittostrategia?* (Leningradin matematiikkaolympialaiset vuonna 1988.)

Tämän tehtävä on yksi kilpailutehtävissä suositun *nim*-pelin monista versioista. Koska mikään poistettavien tikkujen mahdollisista lukumääristä ei ole jaollinen kolmella, pelaaja, jonka vuorolla kasassa on kolmella jaollinen määrä tikkuja, ei voita, ja hänen vuoronsa jälkeen kasassa on tikkumäärä, joka ei ole jaollinen kolmella. Siitä saa kolmella jaollisen poistamalla yhden tai kaksi tikkua. Koska 500 ei ole jaollinen kolmella, A:lla on voittostrategia.

Pelitehtävissä tavallisin ratkaisustrategia on *symmetria*: pelaaja matkii toisen pelaajan liikkeitä ja pakottaa tällä menetelmällä voiton itselleen.

89. *Pelaajat A ja B pelaavat seuraavaa peliä. Aluksi taululla on positiivinen luku m kirjoitettuna n kertaa. Pelin siirto on seuraava. Vuorossa oleva pelaaja valitsee jonkin taululla olevan positiivisen luvun k. Jos se on pienin taululla olevista luvuista, pelaaja korvaa sen luvulla $k-1$. Muussa tapauksessa pelaaja muuttaa luvun k samaksi, kuin pienin taululla oleva luku. A aloittaa. Pelaaja, joka muuttaa viimeisenä positiivisen luvun nollaksi, voittaa. Onko jommallakummalla pelaajalla voittostrategia?* (Viron matematiikkakilpailu vuonna 2005).

Osoittautuu, että tehtävän ratkaisun luonne riippuu siitä, onko luku mn parillinen vai pariton. Jos mn on parillinen, niin ainakin toinen luvuista m ja n on parillinen. Jos m on parillinen, B voi jakaa luvut pareiksi. Jos A muuttaa jotakin lukua, B valitsee sen parin, ja muuttaa sen samaksi kuin A:n juuri muuttama luku. Selvästi B muuttaa tällöin viimeisen positiivisen luvun nollaksi. Jos n on parillinen ja m pariton, eikä taululla ole vielä yhtään nollaa, B voi aina tehdä sellaisen siirron, että pienin taululla oleva luku on parillinen, pienimpien taululla olevien lukujen määrä on pariton ja kaikkia muita lukuja on parillinen määrä kutakin. Jos A nimittäin on pienentänyt pienintä lukua, B voi pienentää sitä uudelleen, jo A taas on muuttanut jonkin muun luvun samaksi kuin pienin, B voi muuttaa saman luvun (koska tätä lukua oli parillinen määrä). Jossain vaiheessa B tulee muuttamaan ensimmäisen luvun nollaksi. Sen jälkeen B voi pelata samoin kuin tilanteessa m parillinen. Jos mn on pariton, niin sekä m että n ovat parittomia. A:n ensimmäisen siirron jälkeen tilanne on B:n kannalta sama kuin edellisessä tapauksessa A:n kannalta. Nyt voittostrategia on A:lla.

* * *

Muutama peliaiheinen kilpailutehtävä:

90*. *Olli ja Liisa pelaavat seuraavaa peliä 2012:lla pelimerkillä, jotka ovat yhdessä läjässä. He ottavat vuorotellen läjästä yhden, kaksi tai kolme pelimerkkiä. Viimeisen pelimerkin saanut voittaa. Liisa aloittaa. Selvitä, voiko jompikumpi pelaaja varmistaa voiton itselleen.* (Suomen lukion matematiikkakilpailu vuonna 2012.)

91*. *Vuorella on kolme lammaspaimenta valvomassa samaa laumaa. He sopivat, että he keritsevät lampaita järjestyksessä vuoropäivin seuraavien sääntöjen mukaan:*
(a) Kunakin päivänä lampaan voi keritä vain yhdeltä puolelta.
(b) Ainakin yksi lammas on kerittävä joka päivä.
(c) Minään kahtena päivänä ei saa keritä tasan samoja lampaita.

Paimen, joka ensiksi joutuu rikkomaan sääntöjä, joutuu paimentamaan lampaat syksyllä laaksoon. Voiko jokin paimenista varmistaa, ettei joudu tähän tehtävään? (Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 1999.)

92*. *1991 lasta istuu piirissä ja pelaa seuraavaa peliä. Yksi aloittaa sanomalla "yksi", myötäpäivään seuraava sanoo "kaksi", seuraava "kolme", sitä seuraava taas "yksi" jne. Kaikki ne, jotka sanovat "kaksi" tai "kolme" joutuvat heti poistumaan piiristä. Viimeiseksi jäänyt on voittaja. Kuka voittaa?* (Vietnamin matematiikkaolympialaiset vuonna 1991.)

93*. 11×11-*šakkilaudan keskimmäisessä ruudussa on pelinappula. Kaksi pelaajaa siirtää sitä vuorotelle. Siirron saa tehdä mihin tahansa ruutuun, mutta toisesta siirrosta alkaen jokaisen siirron on oltava pitempi kuin edellinen. Pelaaja, joka ei enää voi siirtää, on hävinnyt. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?* (Leningradin matematiikkaolympialaiset vuonna 1989.)

6 Lukuteoria

Matematiikkakilpailuissa on yleensä tehtäviä, joiden aiheala on alkeellinen lukuteoria. ”Kilpailulukuteoria” sisältää jonkin verran ainesta, joka ei kuulu lukion Lukuteoria ja logiikka -nimiseen kurssiin. Tässä luvussa pyritään esittelemään ja perustelemaan myös nämä asiat.

Lukuteoriassa käsitteellä *luku* on usein tavallista ahtaampi merkitys. Lukuteorian tarkastelun kohteena ovat luonnollisten lukujen joukon $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$ ominaisuudet. Niinpä tässä luvussa sanalla luku yleensä tarkoitetaan kokonaislukua.

Lukuteorian alkeiden keskeisimpiä asioita jaollisuus.

6.1 Jaollisuus ja alkuluvut

Kokonaisluku q on *jaollinen* kokonaisluvulla $p \neq 0$, jos on olemassa kokonaisluku n siten, että $q = np$. Tällöin sanotaan myös, että p on q:n *tekijä* tai että *p jakaa q:n*. Sitä, että q on jaollinen p:llä, merkitään $p|q$. Sitä, että q ei ole jaollinen p:llä, merkitään $p\not|q$.

Kokonaislukujen a ja b *suurin yhteinen tekijä* d on se (yksikäsitteinen) luonnollinen luku d, jolle pätee $d|a$ ja $d|b$ sekä jos $c|a$ ja $c|b$, niin $c \leq d$. Merkitään $d = \text{s.y.t.}(a, b) = (a, b)$. Selvästi aina $1 \leq (a, b) \leq \min\{|a|, |b|\}$. – Merkintä (a, b) on vakiintunut lukuteoriaan lukujen suurinta yhteistä tekijää tarkoittamaan. Sitä käytetään tässä luvussa runsaasti, ja vain tässä merkityksessä. Merkintä on sikäli epäonnistunut, että sama merkintä on matematiikassa myös vakiintunut tarkoittamaan ainakin lukujen a ja b järjestettyä paria tai koordinaattipistettä ja sitä reaalilukujen avointa väliä, jonka päätepisteet ovat a ja b.

94. *Osoita, että jos* $(a, b) = d$, *niin* $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Merkitään $c = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$. Silloin $1 \leq c$. Toisaalta, koska c on lukujen $\frac{a}{d}$ ja $\frac{b}{d}$ tekijä, on olemassa luonnolliset luvut m ja n siten, että $\frac{a}{d} = mc$, $\frac{b}{d} = nc$ eli $a = m(cd)$, ja $b = n(cd)$. Siis cd on sekä a:n että b:n tekijä, joten $cd \leq d$. Siis $c \leq 1$ eli $c = 1$.

Useamman kuin kahden luvun a_1, a_2, …,a_n suurin yhteinen tekijä

$$(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$$

määritellään palautuskaavan

$$(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) = ((a_1,\, a_2, \ldots,\, a_{n-1}),\, a_n)$$

avulla. Useamman kuin kahden luvun suurimman yhteisen tekijän ominaisuudet ovat analogisia kahden luvun suurimman yhteisen tekijän ominaisuuksien kanssa.

Useat jaollisuuteen liittyvät asiat palautuvat *jakoyhtälöön.*

95. *Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla a ja b, $b > 0$, on olemassa sellaiset kokonaisluvut q ja r, missä $0 \le r < b$, että*

$$a = qb + r.$$

Jakoyhtälön todistus on yksinkertainen epäsuora todistus. Alhaalta rajoitetussa kokonaislukujoukossa on pienin luku. Olkoon r_0 pienin ei-negatiivinen luku, joka on muotoa $a - qb$, missä q on kokonaisluku. Oletetaan, että $r_0 > b$. Mutta silloin olisi myös $a-(q+1)b = r_0-b > 0$, vastoin r_0:sta tehtyä oletusta.

Seuraava yksinkertainen tulos perustelee *Eukleideen*[1] *algoritmin*, joka on menetelmä, jolla kahden luvun suurin yhteinen tekijä on aina löydettävissä.

96. *Osoita, että jos $a = qb + r$, niin $(a,\, b) = (b,\, r)$.*

Luku $(a,\, b)$ on nimittäin sekä a:n että b:n tekijä. Se on siis myös r:n tekijä. Siis $(a,\, b) \le (b,\, r)$. Täsmälleen samoin päätellään, että $(b,\, r) \le (a,\, b)$.

Eukleideen algoritmi perustuu jakoyhtälön ja edellisen tuloksen toistuvaan käyttöön. Olkoon a kokonaisluku ja $b > 0$. On olemassa q_1 ja $r_1 < b$ siten, että $a = q_1b+r_1$. Jos $r_1 > 0$, on olemassa q_2 ja $r_2 < r_1$ siten, että $b = q_2r_1+r_2$. Jatkamalla näin saadaan jonot lukuja q_k, r_k, missä aina $r_{k-2} = q_kr_{k-1} + r_k$ ja $r_1 > r_2 > \ldots > r_k > \ldots \ge 0$. Jollakin indeksin k arvolla on silloin varmasti $r_{k-1} > 0$, mutta $r_k = 0$. Edellisen tuloksen perusteella on nyt $(r_{k-2},\, r_{k-1}) = (r_{k-3}, r_{k-2}) = \ldots = (b,\, r_1) = (a,\, b)$. Lisäksi (jakoyhtälö!) $(r_{k-2},\, r_{k-1}) = r_{k-1}$, joten $(a,\, b)$ on edelliseen prosessiin sisältyvän jakoketjun viimeinen nollasta eroava jakojäännös.

---

[1] *Eukleides Aleksandrialainen* (n. 300 eKr) kirjoitti antiikin matematiikan yleisesityksen *Alkeet.*

97*. *Osoita, että luvut $2x + 3y$ ja $9x + 5y$ ovat jaollisia 17:llä samoilla x:n ja y:n arvoilla.* (Unkarin Eötvös-kilpailu vuonna 1894.)

Yhtälöitä, joiden ratkaisujen vaaditaan olevan kokonaislukuja, sanotaan *Diofantoksen*[1] *yhtälöiksi.* Diofantoksen yhtälössä on yleensä useampia kuin yksi tuntematon. Tyyppiä $ax + by = d$ olevaa Diofantoksen yhtälöä sanotaan *lineaariseksi* tai *ensimmäisen asteen* Diofantoksen yhtälöksi. Tällaisen yhtälön ratkaisu liittyy a:n ja b:n suurimpaan yhteiseen tekijään ja Eukleideen algoritmiin.

Oletetaan, että $d = (a,\, b)$. Yhtälö $ax + by = d$ saadaan ratkaistuksi, kun luetaan Eukleideen algoritmissa esiintyvät jakoyhtälöt lopusta alkuun:

$$\begin{aligned} d &= r_{k-1} = r_{k-3} - q_{k-1}r_{k-2} = r_{k-3} - (r_{k-4} - q_{k-2}r_{k-3})q_{k-1} \\ &= (1 + q_{k-1}q_{k-2})r_{k-2} - q_{k-2}r_kr_{k-3} = \ldots = (\text{ kok.luku })a + (\text{ kok.luku })b \\ &= ax + by. \end{aligned}$$

Jos $(a,\, b) = 1$, sanotaan, että a ja b ovat *yhteistekijättömiä* tai *suhteellisia alkulukuja*.

Edellisen tuloksen perusteella voidaan todistaa keskeinen (ja intuitiivisesti ilmeinen) jaollisuustulos: jos luku on jonkin tulon tekijä ja suhteellinen alkuluku tulon toisen tekijän suhteen, sen on oltava toisen tekijän tekijä. Voidaan myös päätellä, että jokainen kahden luvun yhteinen tekijä on suurimman yhteisen tekijän tekijä.

98. *Osoita, että jos $(d,\, a) = 1$ ja $d|ab$, niin $d|b$. Osoita vielä, että jos $(a,\, b) = d$ ja $c|a$, $c|b$, niin $c|d$.*

Edellä sanotun perusteella on olemassa sellaiset kokonaisluvut x ja y, että $dx + ay = 1$. Siis $(db)x + (ab)y = b$. Luku d on tekijänä molemmissa vasemman puolen yhteenlaskettavissa, joten se on tekijänä myös oikealla puolella eli luvussa b. Jälkimmäinen väite seuraa yhtälön $ax + by = d$ toteuttavien lukujen x ja y olemassa olosta ja siitä, että $c|(ax + by)$.

Induktiolla voidaan edelleen todistaa, että jos $n = a_1a_2 \cdots a_kb$, $(d,\, a_i) = 1$, kun $i = 1,\, \ldots,\, k$ ja $d|n$, niin $d|b$. – Tämän asian voi ilmaista myös niin, että jos luku on yhdistetyn luvun tekijä, se on jonkin tämän luvun tekijän tekijä.

Seuraavasta kokonaislukukertoimisen polynomin jaollisuusominaisuudesta on joskus hyötyä algebrallisen yhtälön ratkaisun etsimisessä.

99*. *Todista: jos*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

on kokonaislukukertoiminen polynomi ja jos rationaaliluku $\dfrac{s}{q}$, missä $(s,\, q) = 1$ on p:n nollakohta, niin s on a_0:n tekijä ja q on a_n:n tekijä.

[1] *Diofantos* eli Aleksandriassa luultavasti noin 250 jKr.

Erityisesti, jos $a_n = 1$, niin yhtälön $p(x) = 0$ kokonaislukujuuret ovat a_0:n tekijöitä.

Positiivinen luku $p > 1$ on *alkuluku,* jos siitä, että $c|p$ seuraa, että $|c| = p$ tai $|c| = 1$. Positiivinen luku $q > 1$, joka ei ole alkuluku, on *yhdistetty luku.* Yhdistetyllä luvulla on muita tekijöitä kuin se itse tai 1. On huomattava, että luku 1 ei ole alkuluku eikä yhdistetty luku.

100. *Osoita, että jokainen kokonaisluku $n > 1$ on alkuluku tai alkulukujen tulo.*

Todistus perustuu induktioon. Luku 2 on alkuluku. Oletetaan, että jokainen $k \leq n$ on alkuluku tai alkulukujen tulo. Nyt luku $n+1$ voi olla alkuluku. Ellei se ole alkuluku, niin $n+1 = pq$, missä $p < n$ ja $q < n$ ovat induktio-oletuksen perusteella alkulukuja tai alkulukujen tuloja.

Luvun alkutekijöiden etsimistä helpottaa seuraava tulos. Sen mukaan luvun tekijöitä etsittäessä ei tarvitse tutkia kuin osa tutkittavaa lukua pienemmistä luvuista.

101. *Osoita, että jos n on yhdistetty luku, niin sillä on tekijä, joka on $\leq \sqrt{n}$.*

Yhdistettynä lukuna $n = pq$, missä $1 < p < n$ ja $1 < q < n$. Jos sekä p että q olisivat $> \sqrt{n}$, jouduttaisiin ristiriitaan $pq > n$.

Seuraavaa tulosta kutsutaan *aritmetiikan peruslauseeksi.*

102. *Kokonaisluvun esitys alkulukujen tulona on yksikäsitteinen, lukuun ottamatta tekijöiden järjestystä.*

Väitteen todistamiseksi riittää, että tarkastellaan tapausta, jossa kokonaisluku n on yhdistetty. Olkoon n:llä kaksi tuloesitystä: $n = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_l$, missä $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$ ovat alkulukuja ja $k \leq l$. Numeron 98 jälkeen tehdystä huomautuksesta seuraa, että p_1 on luvun $q_1 \cdots q_l$ tekijä, se on jonkin q_j:n tekijä. Voidaan olettaa, että p_1 on q_1:n tekijä. Koska q_1 on alkuluku ja $p_1 > 1$, on oltava $p_1 = q_1$. Siis $p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_l$. Edellinen päättely voidaan toistaa k kertaa. Jos $k = l$, on saatu haettu yksikäsitteisyys. Jos $k < l$, päädytään ristiriitaan $1 = q_{k+1} \cdots q_l$.

Sellaista luvun n tekijää, joka on alkuluku, sanotaan n:n *alkutekijäksi*. Esitys $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, joka edellisen mukaan on yksikäsitteinen, on luvun n *alkutekijähajotelma*.

Tuloesityksen perusteella saadaan toinen keino lukujen m ja n suurimman yhteisen tekijän (m, n) laskemiseksi: jos

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \tag{1}$$

ja

$$n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}, \tag{2}$$

p_i:t ovat eri alkulukuja ja $\alpha_i \geq 0$ ja $\beta_i \geq 0$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, k$, niin

$$(m, n) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k},$$

missä $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$.

Lukujen m ja n *pienin yhteinen monikerta* (eli *pienin yhteinen jaettava*) p.y.m.(m, n) on positiivinen luku a, jolle on voimassa $m|a$ ja $n|a$, ja jos b on positiivinen ja $m|b$, $n|b$, niin $a \le b$.

Merkitään $a = \text{p.y.m.}(m, n) = [m, n]$. Jos m ja n ovat kuten kaavoissa (1) ja (2), niin

$$[m, n] = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k},$$

missä $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$. (Miksi?) Koska $\gamma_i + \delta_i = \alpha_i + \beta_i$, on

$$(m, n)[m, n] = mn.$$

Useamman kuin kahden luvun $m_1, m_2, \ldots, m_k$ pienin yhteinen monikerta $[m_1, m_2, \ldots, m_k]$ määritellään analogisesti.

Seuraavan lauseen todistuksen ideaa käytetään hyväksi kilpatehtävissäkin.

103. *Alkulukuja on äärettömän paljon.*

Väite todistetaan epäsuorasti. Tehdään vastaoletus: alkulukujen joukko on äärellinen joukko

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}.$$

Olkoon $n = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Kohdan 6 lauseen perusteella luvulla n on alkutekijä p, joka on eräs luvuista p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Koska $p|n$ ja p on tekijänä myös luvussa $p_1 p_2 \cdots p_k$, joudutaan ristiriitaan $p|1$.

Täydennetään vielä tietoja lineaaristen Diofantoksen yhtälöiden ratkaisuista.

104. *Osoita, että yhtälöllä*

$$ax + by = c$$

on kokonaislukuratkaisu x, y silloin ja vain silloin, kun $(a, b)|c$.

On ilmeistä, että jos yhtälöllä on ratkaisu, niin $(a, b)|c$. Oletetaan sitten, että $(a, b)|c$ ja merkitään $(a, b) = d$. Silloin $c = md$, missä m on kokonaisluku. Yhtälöllä $ax+by = d$ on aikaisemmin esitetyn mukaan ratkaisu x', y'. Selvästi $x = mx'$, $y = my'$ on alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Tarkastellaan vielä Diofantoksen yhtälöä $ax + by = c$, missä $\dfrac{c}{(a,b)}$ on kokonaisluku (ja yhtälöllä on siis ratkaisu). Olkoon $a' = \dfrac{a}{(a,b)}$, $b' = \dfrac{b}{(a,b)}$ ja $c' = \dfrac{c}{(a,b)}$. Tällöin yhtälöt $ax+by = c$ ja $a'x+b'y = c'$ ovat yhtäpitävät, joten niillä on samat ratkaisut. Koska $(a', b') = 1$ (numero 94), voidaan rajoittua tutkimaan sellaisia yhtälöitä $ax + by = c$, joissa $(a, b) = 1$.

105. *Olkoon $(a, b) = 1$, $ab \neq 0$ ja $ax_0 + by_0 = c$. Osoita, että yhtälön $ax + by = c$ kaikki ratkaisut ovat*

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at,$$

missä t saa kaikki kokonaislukuarvot.

Se, että ilmoitettua muotoa olevat luvut ovat yhtälön ratkaisuja, on ilmeistä: Olkoon t mielivaltainen kokonaisluku. Silloin

$$a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 = c.$$

Tarkastellaan sitten yhtälön mielivaltaista ratkaisua x, y. Koska $ax + by = c$, niin $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Siis $b|(a(x - x_0))$, ja koska $(a, b) = 1$, niin $b|(x - x_0)$. Siis $x - x_0 = bt$ jollakin kokonaisluvulla t. Samoin nähdään, että $y - y_0 = at'$ jollakin kokonaisluvulla t'. Mutta koska $0 = ax + by - c = ax_0 + abt + by_0 + bat' - c = ab(t + t')$ ja $ab \neq 0$, on $t = -t'$.

* * *

Muutama jaollisuusaiheinen kilpailutehtävä.

106*. *Merkitään luvun n eri tekijöiden lukumäärää symbolilla $N(n)$. Esimerkiksi luvun 24 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ja 24, joten $N(24) = 8$. Selvitä, onko $N(1) + N(2) + \cdots + N(1989)$ parillinen vai pariton.* (Australian matematiikkaolympialaiset vuonna 1989.)

107*. *Olkoon $p > 2$ alkuluku. Osoita, että luku $\frac{2}{p}$ voidaan kirjoittaa tasan yhdellä tavalla muotoon $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja ja $x > y$.* (Unkarin Eötvös–Kürschak-kilpailu vuonna 1931.)

108*. *Määritä kaikki positiivisten lukujen a, b, c kolmikot, joille $[a, b, c] = a + b + c$.* (Itävallan matematiikkaolympialaiset vuonna 2005.)

109*. *Olkoot a, b ja n positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että $a + b$ on jaollinen n:llä ja $a^2 + b^2$ on jaollinen n^2:lla. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m luku $a^m + b^m$ on jaollinen luvulla n^m.* (Viron matematiikkaolympialaiset vuonna 2005.)

6.2 Lukukongruenssit

Usean lukuteoreettisen tehtävän ratkaisu helpottuu olennaisesti, kun ratkaisijan käyttämien työkalujen joukossa on *lukukongruenssi*.

Olkoon c positiivinen kokonaisluku. Lukujen a ja b sanotaan olevan *kongruentteja modulo c*, jos $c|(b - a)$ eli jos $a = b + kc$ jollakin kokonaisluvulla k. Tällöin merkitään $a \equiv b \bmod c$ (tai jos epäselvyyden vaaraa ei ole, vain $a \equiv b$). Relaatiota $a \equiv b \bmod c$ sanotaan *kongruenssiksi* tai *lukukongruenssiksi*.

Jos a on mielivaltainen kokonaisluku ja c on positiivinen kokonaisluku, on aina olemassa ehdon $0 \leq r < c$ täyttävä luku r siten, että $a \equiv r \bmod c$. Tämä seuraa jakoyhtälöstä.

Kongruenssit ovat erittäin käyttökelpoisia monissa jaollisuuteen liittyvissä tehtävissä. Tämä perustuu siihen, että kongruenssi käyttäytyy tavallisten laskutoimitusten suhteen lähes samoin kuin tavallinen lukujen yhtäsuuruus.

110*. *Oletetaan, että* $a \equiv b \bmod m$ *ja* $c \equiv d \bmod m$. *Osoita, että on voimassa*

$$a + c \equiv b + d \bmod m$$
$$ac \equiv bd \bmod m$$

ja

$$a^k \equiv b^k \bmod m$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

Kongruenssien jakolasku on hiukan monitahoisempi asia.

111*. *Osoita: jos* $ac \equiv bc \bmod m$ *ja* $(c, m) = 1$, *niin* $a \equiv b \bmod m$.

Numeron 94 perusteella saadaan yleisemmin: Jos $ac \equiv bc \bmod m$ ja $(c, m) = d$, niin $a \equiv b \bmod \frac{m}{d}$.

Kongruenssien avulla saadaan helposti muutamia yleisiä *jaollisuustarkistimia*.

112*. *Luku on jaollinen 3:lla tai yhdeksällä jos ja vain jos sen numeroiden summa on jaollinen kolmella tai yhdeksällä. Luku on jaollinen 11:llä, jos ja vain luku, joka saadaan kun lasketaan yhteen luvun ensimmäinen, kolmas, jne. numero ja summasta vähennetään luvun toisen, neljännen jne. numeron summa, on jaollinen 11:llä.*

113*. *Kun luku* 4444^{4444} *kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä, sen numeroiden summa on* A. *Olkoon* B *luvun* A *numeroiden summa. Määritä luvun* B *numeroiden summa.* (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1975.)

Monissa tehtävissä ratkaisun ytimenä on se havainto, että luvun neliön kongruenssilla $\bmod n$ on vähemmän vaihtoehtoja kuin alkuperäisen luvun kongruenssilla.

114*. *Osoita, että* $x^2 \equiv 0 \bmod 3$ *tai* $x^2 \equiv 1 \bmod 3$ *ja että* $x^2 \equiv 0 \bmod 4$ *tai* $x^2 \equiv 1 \bmod 4$.

Kilpailumatematiikkaan perehtyvän kannattaa selvittää myös muiden moduleiden kuin kolmen ja neljän yhteydessä syntyviä *neliönjäännöksiä*. Tyypillinen tehtävä, jossa tällaista neliönjäännösominaisuutta käytetään hyväksi, on seuraava.

115*. *Määritä kaikki yhtälön*

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$$

kokonaislukuratkaisut. (Yhdysvaltain matematiikkaolympialaiset vuonna 1976.)

Sanomme, että x on kongruenssiyhtälön $ax \equiv b \bmod m$ *varsinainen ratkaisu*, jos $ax \equiv b$ ja $0 \leq x < m$.

116. *Jos* $(a, m)|b$, *niin yhtälöllä* $ax \equiv b \bmod m$ *on* (a, m) *kappaletta varsinaisia ratkaisuja. Jos* (a, m) *ei ole* b*:n tekijä, yhtälöllä ei ole ratkaisuja.*

Väitteen todistamiseksi etsitään x ja y siten, että $ax - b = my$ eli $ax - my = b$. Jos (a, m) ei ole tekijänä luvussa b, tällaisia lukuja ei ole. Jos $(a, m)|b$, merkitään $(a, m) = d$. Olkoon x_0, y_0 se yhtälön $\frac{a}{d}x - \frac{m}{d}y = \frac{b}{d}$ ratkaisu, jolle x_0 on ei-negatiivinen ja pienin mahdollinen. Silloin $x_0 < \frac{m}{d}$ ja x_0, $x_0 + \frac{m}{d}$, $x_0 + 2\frac{m}{d}, \ldots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ ovat varsinaisia ratkaisuja.

Jos $(a, m) = 1$, niin yhtälöllä $ax \equiv 1 \bmod m$ on ratkaisu x. Se on a:n *käänteisluku* mod m.

Seuraava tulos on nimeltään *Fermat'n*[1] *pieni lause*. Yleensä oletetaan, että se on tuttu kilpatehtävien ratkaisijoille.

117. *Olkoon* p *alkuluku ja* a *kokonaisluku, jolle pätee* $(a, p) = 1$. *Silloin*

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

Fermat'n pieni lause voidaan todistaa eri tavoin. Käytetään tässä binomikaavaa ja induktiota. Oletetaan ensin, että a on positiivinen ja todistetaan, että p on luvun $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ tekijä; koska $(a, p) = 1$, p on tällöin myös luvun $a^{p-1} - 1$ tekijä. Jos $a = 1$ niin $a^p - a = 0$ ja varmasti $p|(a^p - a)$. Tehdään induktio-oletus $a \geq 1$ ja $p|(a^p - a)$. Tarkastellaan lukuja $k!\binom{p}{k} = p(p-1)\ldots(p-k+1)$. Nyt $p|k!\binom{p}{k}$, mutta jos $k < p$, niin p ei ole tekijänä luvussa $k!$. Siis $p|\binom{p}{k}$, joten p jakaa luvun

$$(a+1)^p - a^p - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k = (a+1)^p - (a+1) - (a^p - a).$$

Induktioaskel on näin otettu. Negatiivisia a:n arvoja koskeva tulos seuraa parittomilla p:n arvoilla suoraan tästä; jos taas $p = 2$, on $a^p - a = a(a-1)$; tämä on jaollinen kahdella koska a tai $a - 1$ on parillinen.

Jos $(a, p) = 1$ ja p on alkuluku, voidaan kongruenssiyhtälö $ax \equiv b \bmod p$ ratkaista Fermat'n lauseen avulla:

$$x \equiv a^{p-1}x \equiv a^{p-2}(ax) = a^{p-2}b \bmod p.$$

Fermat'n pienen lauseen yleistys, *Eulerin lause*, kuuluu sekin matematiikkakilpailuissa tunnetuiksi oletettujen asioiden joukkoon. Eulerin lauseessa esiintyy *Eulerin funktio* ϕ, joka on ensin määriteltävä.

Olkoon $\phi(n)$ niiden lukujen a, $1 \leq a < n$ lukumäärä, joille pätee $(a, n) = 1$. Täten esimerkiksi $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$ ja $\phi(5) = 4$. Positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio ϕ on *Eulerin funktio*.

[1] *Pierre de Fermat* (1601–65), ranskalainen juristi ja matemaatikko.

118. *Jos luvun n eri alkutekijät ovat $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$, niin*

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Todistetaan tämä käyttämällä hyväksi inkluusion ja ekskluusion periaatetta (numero 68). Lukujen $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ joukossa on tasan $\dfrac{n}{p_i}$ p_i:llä jaollista lukua. Poistetaan joukosta tällaiset, kun $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Jäljelle jäisi

$$n - n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k}\right)$$

lukua. Nyt on kuitenkin tullut poistetuksi kaikki p_ip_j:llä jaolliset luvut kahteen kertaan. Lisätään nämä; nyt luvuiksi a, $(n,\ a) = 1$ on ehdolla

$$n - n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_1p_3} + \cdots + \frac{1}{p_{k-1}p_k}\right)$$

lukua. Muotoa $p_ip_jp_l$ olevat luvut ovat tulleet lisätyiksi kahdesti, joten ne on vähennettävä jne. Lopulta

$$\phi(n) = n - n\sum\frac{1}{p_i} + n\sum\frac{1}{p_ip_j} - \cdots \pm \frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}.$$

Kun summa kirjoitetaan tulomuotoon, saadaan väite.

Seuraava tulos on *Eulerin lause.*

119. *Jos $(a,\ n) = 1$, niin $a^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$.*

Todistetaan lause. Olkoot $1 = r_1 < r_2 < \ldots < r_{\phi(n)} = n-1$ ehdon $(r_i,\ n) = 1$ toteuttavat luvut. Olkoon $ar_i = q_i \bmod n$, $0 \le q_i < n$. Jos $q_i \equiv q_j$, on $ar_j \equiv ar_i \bmod n$ ja numeron 111 perusteella $r_i \equiv r_j$ eli $r_i = r_j$. Tämän vuoksi

$$\{q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{\phi(n)}\} = \{r_1, r_2,\ \ldots\ r_{\phi(n)}\}.$$

Siis myös

$$r_1r_2\cdot\ldots\cdot r_{\phi(n)} \equiv (ar_1)(ar_2)\ldots(ar_{\phi(n)}) \equiv a^{\phi(n)}r_1r_2\ldots r_{\phi(n)} \bmod n.$$

Koska $(r_1r_2\ldots r_{\phi(n)},\ n) = 1$, saadaan edellä esitetyn kongruenssien jakolaskuominaisuuden perusteella $1 \equiv a^{\phi(n)} \bmod n$.

Jos p on alkuluku, niin $\phi(p) = p - 1$, ja Eulerin lause palautuu Fermat'n lauseeksi (joka siis on tullut tässä uudelleen ja eri tavalla todistetuksi).

Eulerin lausetta voidaan käyttää lineaaristen kongruenssien ratkaisemiseen samoin kuin Fermat'n pientä lausetta: jos $(a,\ n) = 1$, niin kongruenssilla $ax \equiv b \bmod n$ on ratkaisu $x = ba^{\phi(n)-1}$.

Seuraava tulos, nimeltään *kiinalainen jäännöslause*, oletetaan myös tunnetuksi matematiikkakilpailuissa.

120. *Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat kokonaislukuja, jotka ovat pareittain yhteistekijättömiä ($(a_i, a_j) = 1$, kun $i \neq j$), jos $a = \prod_{i=1}^{n} a_i$ ja jos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ovat mielivaltaisia kokonaislukuja, niin on olemassa (ja modulo a vain yksi) luku x, jolle on pätevät yhtälöt*

$$x \equiv b_i \bmod a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Todistetaan tämä. Merkitään $c_i = \dfrac{a}{a_i}$. Silloin $(c_i, a_i) = 1$. Olkoon vielä d_i c_i:n käänteisluku $\bmod a_i$, siis yhtälön $c_i x \equiv 1 \bmod a_i$ ratkaisu. Tarkastellaan lukua $x = c_1 d_1 b_1 + c_2 d_2 b_2 + \cdots + c_n d_n b_n$. Olkoon j mielivaltainen indeksi 1:n ja n:n väliltä. Nyt, jos $i \neq j$, niin a_j on c_i:n tekijä. Edellisen summan muut termit kuin $c_j d_j b_j$ ovat jaollisia a_j:llä. Lisäksi $c_j d_j \equiv 1 \bmod a_j$. Siis $x \equiv b_j \bmod a_j$. Luku x toteuttaa siis jokaisen kongruenssiyhtälön. Jos kaksi eri lukua toteuttavat kaikki kongruenssiyhtälöt, niiden erotus on jaollinen a:lla.

Kokonaislukukolmikon (x, y, z) jäsenet ovat *Pythagoraan*[1] *lukuja*, jos

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Tunnetuimpia esimerkkejä Pythagoraan luvuista ovat lukukolmikot $(3a, 4a, 5a)$ ja $(5a, 12a, 13a)$.

Pythagoraan lukuja voidaan tuottaa äärettömän monta kaavojen

$$x = (m^2 - n^2)p, \quad y = 2mnp, \quad z = (m^2 + n^2)p, \tag{1}$$

missä m, n ja p ovat kokonaislukuja, avulla. Kaikki Pythagoraan luvut ovat toisaalta muotoa (1).

121. *Osoita, että jos $a^2 + b^2 = c^2$ ja a, b ja c ovat yhteistekijättömiä, niin on olemassa kokonaisluvut m ja n , $(m, n) = 1$, siten, että $\{a, b\} = \{m^2 - n^2, 2mn\}$ ja $c = m^2 + n^2$.*

Todistuksen aluksi havaitaan, että kaikki luvut a, b, c eivät ole parillisia, muutenhan niillä olisi ykköstä suurempi suurin yhteinen tekijä. Jos a ja b olisivat molemmat parittomia, olisi c parillinen ja c^2 jaollinen 4:llä. Toisaalta olisi $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \bmod 4$ ja siis $c^2 \equiv 2 \bmod 4$. Luvuista a ja b toinen on siis parillinen ja toinen pariton. Olkoon a pariton ja b parillinen. Nyt $b^2 = (c-a)(c+a)$. Molemmat $t = c-a$ ja $u = c+a$ ovat parillisia. Koska $2c = t+u$ ja $2a = u-t$, luvuilla t ja u ei ole muita yhteisiä tekijöitä kuin 2. Siis $t = 2m'$ ja $u = 2n'$, $(m', n') = 1$. Koska $b^2 = tu = 4m'n'$, lukujen m' ja n' on oltava neliölukuja, $m' = m^2$, $n' = n^2$.

Viimeisenä kilpailutehtävissä joskus käytettävänä työkaluna esitetään *Wilsonin*[2] *lause*.

---

[1] *Pythagoras Samoslainen* (n. 500 eKr) puoliksi myyttinen kreikkalainen filosofi ja matemaatikko.

[2] *John Wilson* (1741–93), englantilainen matemaatikko ja juristi.

122. *Osoita, että luku $(p-1)!+1$ on jaollinen p:llä jos ja vain jos p on alkuluku.*

Wilsonin lauseen vain jos -puoli todistuu epäsuorasti. Jos p ei olisi alkuluku, sillä olisi ykköstä suurempi tekijä, joka olisi $\leq p-1$. $(p-1)!$ on jaollinen tällä tekijällä, joten myös 1 olisi tällä tekijällä jaollinen. Oletetaan sitten, että p on alkuluku. Tarkastellaan lukuja $1, 2, \ldots, p-1$. Millään näistä luvuista ei ole yhteistä tekijää p:n kanssa, joten jokaisella on käänteisluku $\bmod p$. Jos jonkin näistä luvuista, esimerkiksi a:lla, tämä käänteisluku on luku itse, niin $a^2 \equiv 1 \bmod p$ eli $(a-1)(a+1) \equiv 0 \bmod p$. Luvuista $a-1$ ja $a+1$ ainakin toisen on oltava p:llä jaollinen. Näin on jos ja vain jos $a=1$ tai $a=p$. Muille luvuille luku ja käänteisluku ovat eri lukuja. Mutta se merkitsee, että tulon $(p-1)!$ luvut voidaan, lukuun ottamatta lukuja 1 ja $p-1$ ryhmitellä pareiksi a, b siten, että $ab \equiv 1 \bmod p$. Siis $(p-1)! \equiv 1 \cdot (p-1) \equiv -1 \bmod p$.

* * *

Seuraavassa muutama kilpailutehtävä, joissa kongruensseilla on merkitystä.

123*. *Osoita, että*

$$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{15}x$$

on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla x. (Australian matematiikkaolympialaiset vuonna 1994.)

124*. *Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle $2549 | n^{2545} - 2541$.* (Thaimaan matematiikkaolympialaiset vuonna 2005; tehtävässä esiintyvät luvut liittyvät Thaimaassa käytettävän buddhalaisen kalenterin vuosilukuihin.)

125*. *Kokonaislukujono $u_1, u_2, u_3, \ldots$ toteuttaa palautuskaavan $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$. Lisäksi $u_1 = 39$ ja $u_2 = 45$. Osoita, että jonossa on äärettömän monta 1986:lla jaollista lukua.* (Kanadan matematiikkaolympialaiset vuonna 1986.)

126*. *Määritä kaikki ei-negatiiviset kokonaisluvut x, y ja z, jotka toteuttavat yhtälön*

$$2^x + 3^y = z^2.$$

7 Geometria

Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten kuuden tehtävän sarjassa on tavallisimmin ollut kaksi geometria-aiheista tehtävää. Kun tehtävien vaikeustaso on vaihteleva, niin melkein välttämättä kahdesta geometriantehtävästä toinen on sarjan helpoimpia.

Matematiikkakilpailujen geometriantehtävät ovat yleisimmin todistustehtäviä. Tehtävien ratkaisussa on silloin tiedettävä, mihin tosiasioihin vetoaa. Keskeiset työkalut ovat kolmioiden yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuslauseet, muutamat muut kolmioihin liittyvät perusasiat, ympyrän, sen sekanttien ja tangenttien sekä jännenelikulmioiden perusominaisuudet. Geometriset peruskuvaukset saattavat myös olla ratkaisukeino. Tehtäviä voi usein lähestyä trigonometrian avulla. Analyyttisen geometrian metodein helposti ratkeavia tehtäviä pyritään yleensä kaihtamaan, mutta silti analyyttinen geometria on aina varteenotettava vaihtoehto. Tietyissä tilanteissa kompleksilukujen geometrisen tulkinnan kautta päästään suoriin ratkaisuihin. Myös vektorilaskenta voi johtaa tuloksiin.

Kilpailutehtävissä saatetaan käsitellä myös kolmiulotteista geometriaa eli avaruusgeometriaa. Tässä esityksessä ei avaruusgeometriaan kuitenkaan puututa muuten kuin muutamassa vektoriaiheisessa tehtävässä.

7.1 Perusteita

Geometria – niin kuin muukin matematiikka – on deduktiivinen järjestelmä. Se voidaan eri tavoin rakentaa joidenkin perusolettamuksien, *aksioomien* pohjalle. Kilpailutehtävien ratkaisemisen kannalta ei ole tarpeen pureutua aivan perusteisiin. Todistamisen rutiinienkin oppimisen kannalta on kuitenkin hyödyllistä etsiä perustelut käytettäville geometrisille työkaluille, semminkin, kun peruskoulun ja lukion geometriaosuudet ovat opetussuunnitelmien kehittyessä[1] muodostuneet todistamisen suhteen varsin karuiksi. Niinpä tämä luku on itse asiassa tiivistetty geometrian oppikurssi ja harjoituksien joukossa on monia tuttujen geometrian lauseiden todistuksia. Kaikkia käsitteitä ei kuitenkaan määritellä eikä kaikkea todisteta – tilan ja lukijan kärsivällisyydenkin säästämiseksi.

---

[1] On muistettava *kehityksen* ja *edistyksen* ero: edellinen ei aina vie parempaan suuntaan.

7.1.1 Suorat ja monikulmiot

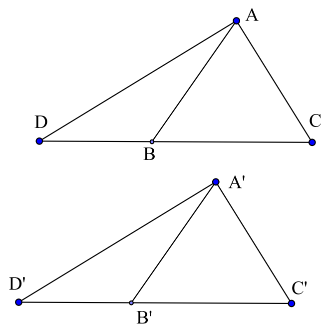
Merkitsemme sitä, että janat AB ja CD ovat *yhteneviä* eli *yhtä pitkiä*, yhtälöllä $AB = CD$. Merkintää voi pitää kaksitulkintaisena; emme kuitenkaan tarkoita, että AB ja CD olisivat sama jana. Vastaavasti kulmien $\angle ABC$ ja $\angle DEF$ yhtäsuuruutta merkitään $\angle ABC = \angle DEF$. Erityisesti $\angle ABC = \angle CBA$; emme siis ajattele kulman merkintään liittyvän tietoa siitä, onko ensin mainittu piste tietyllä kulman kyljellä.

Kolmiot ABC ja DEF ovat *yhteneviä*, merkittynä $ABC \cong DEF$, jos ja vain jos $AB = DE$, $BC = EF$ ja $CA = FD$ sekä $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ ja $\angle CAB = \angle FDE$. *Yhtenevyyslauseet* ilmoittavat, mitkä lievemmät ehdot jo takaavat kolmioiden yhtenevyyden. Yhtenevyyslauseita on viisi, ja ne on tapana nimetä symbolein sks, ksk, kks, sss ja ssk sen mukaan, minkä kolmion osien – sivujen ja kulmien – yhtäsuuruuteen yhtenevyys perustuu. Todistuksia kirjoitettaessa on tapana käyttää kirjainyhdistelmää lyhentämään ilmausta, siis "kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä (sks)", kun tarkoitetaan "kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä, koska niissä on kaksi paria yhtä pitkiä sivuja ja näiden sivujen välissä yhtä suuret kulmat".

Yhtenevyyslauseista ensimmäinen, sks, on tapana hyväksyä todistamatta. Se siis luetaan geometrian aksioomiin.

127. *Jos $AB = DE$, $\angle ABC = \angle DEF$ ja $BC = EF$, niin kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä.*

Yhtenevyyskriteerin sks seurauksista seuraavien kolmen numeron sisältämät ovat geometrian loogisen rakenteen kannalta olennaisia.



128. *Yhtä suurten kulmien vieruskulmat ovat yhtä suuret.*

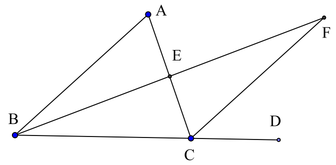
Tämä asia perustellaan usein kulman mittaamisen avulla; jos kulman suuruus on α, kummankin vieruskulman suuruus on $180^\circ - \alpha$. Kulman mittaluku ei kuitenkaan ole geometrian järjestelmän perusteita eikä käsitteenä ongelmaton. Esitetään siis todistus, joka perustuu vain yhtenevyyskriteeriin sks: Olkoon $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Pisteet on voitu valita niin, että $AB = A'B'$ ja $BC = B'C'$. Olkoon vielä D ja D' BC:n ja $B'C'$:n vastakkaisten puolisuorien pisteitä niin, että $BD = B'D'$. Nyt $ABC \cong A'B'C'$ (sks), joten $\angle ACB = \angle A'C'B'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ ja $CA = C'A'$. Koska $CD = CB + BD = C'B' + B'D' = C'D'$, niin $DCA \cong D'C'A'$ (sks). Siis $AD = A'D'$ ja $\angle CAD = \angle C'A'D'$. Mutta nyt $\angle BAD = \angle CAD - \angle CAB = \angle C'A'D' - \angle C'A'B' = \angle B'A'D'$. Siis $BAD \cong B'A'D'$ (sks). Viimeisestä yhtenevyydestä seuraa sitten $\angle ABD = \angle A'B'D'$, eli haluttu tulos.

Geometristen kilpatehtävien ratkaisuissa ei kulman mittalukuun tietenkään suhtauduta näin ankarasti, vaan oletetaan, että käytössä on niin pitkälle kehitetty järjestelmä, että tyyppiä "$\angle ABC = 60°$" olevat ilmaukset ovat täysin mielekkäitä.

Edellisestä seuraa heti, että *ristikulmat* eli kahden suoran leikatessa syntyvät vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria.

Kulma on *suora*, jos se on yhtä suuri kuin vieruskulmansa. Tästä seuraa heti, että jos kahden suoran ℓ_1 ja ℓ_2 leikatessa syntyvistä kulmista yksi on suora, niin muutkin ovat. Suorat ovat tällöin *kohtisuorassa* toisiaan vastaan. Tätä merkitään $\ell_1 \perp \ell_2$. – On varsin helppo osoittaa, että suora kulma näin määriteltynä on yksikäsitteinen: kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.

129. *Kolmion jokaisen kulman vieruskulma on suurempi kuin kumpikaan kolmion kahdesta muusta kulmasta.*



Olkoon $\angle ACD$ kolmion ABC kulman ACB vieruskulma. Osoitetaan, että $\angle CAB < \angle ACD$. Jos E on janan AC keskipiste ja $F \neq B$ se puolisuoran BE piste, jolle $EF = EB$, niin kolmiot AEB ja CEF ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle ECF = \angle EBA$. Mutta koska F on kulman ACD aukeamassa, $\angle ACF < \angle ACD$, ja väite on todistettu.

130. *Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.*

Jos kolmiossa ABC on $AB = BC$, niin kolmiot ABC ja ACB ovat yhteneviä (sks), joten niiden vastinkulmat $\angle ABC$ ja $\angle ACB$ ovat yhtä suuria.

Edellisestä ja numeron 129 tuloksesta johtuvat mm. seuraavat monen epäyhtälön pohjana olevat tulokset:

131*. *Todista, että kolmiossa on pitemmän sivun vastainen kulma suurempi kuin lyhemmän sivun vastainen kulma ja suuremman kulman vastainen sivu pitemmpi kuin pienemmän kulman vastainen sivu.*

132*. *Todista, että kolmion sivu on lyhempi kuin muiden kahden sivun summa ja pitempi kuin muiden kahden sivun erotus.*

Tämä tulos on *kolmioepäyhtälö*.

Tuloksesta sks seuraavat myös enemmän tai vähemmän suoraan seuraavat *yhtenevyyslauseet*.

133*. *Todista, että seuraavista kolmesta ehdosta seuraa jokaisesta kolmioiden ABC ja DEF yhtenevyys:*

ksk: $\angle ABC = \angle DEF$, $BC = EF$ *ja* $\angle BCA = \angle EFD$;

kks: $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ *ja* $AB = DE$.

sss: $AB = DE$, $BC = EF$ *ja* $CA = FD$.

Viimeisen yhtenevyyskriteerin ssk käyttö vaatii hiukan varovaisuutta, siinä kun on kaksi vaihtoehtoa, joista vain toinen on kolmioiden yhtenevyys.

134*. *Kolmioissa* ABC *ja* DEF *on* $AB = DE$, $AC = DE$ *ja* $\angle ABC = \angle DEF$. *Osoita, että joko* $ABC \cong DEF$ *tai* $\angle EFD$ *ja kulman* $\angle ACB$ *vieruskulma ovat yhtä suuret.*

Euklidisen tasogeometrian perusteita on vielä *yhdensuuntaisuus*. Kaksi tason eri suoraa ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaisia, jos ne eivät leikkaa toisiaan. Relaatiota merkitään $\ell_1 \| \ell_2$. (On tapana pitää suoraa myös yhdensuuntaisena itsensä kanssa.) Olkoot ℓ_1 ja ℓ_2 suoria. Jos ℓ_1 ja ℓ_2 eivät ole yhdensuuntaisia ja suora ℓ_3 leikkaa nämä (muualla kuin ℓ_1:n ja ℓ_2:n leikkauspisteessä), niin numerosta 129 seuraa, että leikkauskohtiin syntyvät samankohtaiset kulmat eivät ole yhtä suuria. Euklidisen geometrian aksioomajärjestelmään kuuluva *yhdensuuntaisuus-* eli *paralleeliaksiooma* ilmoittaa, että suoran ℓ ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee tasan yksi ℓ:n suuntainen suora. Edellä sanotun perusteella ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaisia jos ja vain jos minkä hyvänsä kolmannen suoran näitä suoria leikatessa syntyvät samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria.

Yhdensuuntaisuusaksioomasta seuraa heti, että kolmion kulmien summa on sama kuin kahden suoran kulman summa ja että kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa. Kolmiossa voi olla enintään yksi suora kulma tai suoraa kulmaa suurempi eli *tylppä* kulma. Yhtenevyyskriteeri ssk:n (numero 134) vaihtoehtotapaus ei tule kysymykseen, jos $\angle ABC$ on suora tai tylppä.

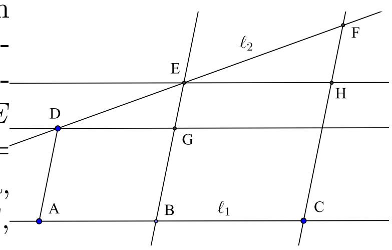
Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia. Suunnikas on *neljäkäs* eli *vinoneliö*, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Yhdensuuntaisuuden kulmaominaisuuden ja kolmioiden yhtenevyyslauseiden avulla on helppo todistaa lukuisa joukko muita ehtoja, jotka takaavat sen, että nelikulmio on suunnikas, ja perustella sellaisia suunnikkaan ominaisuuksia, joita käytetään hyväksi geometristen tehtävien ratkaisemisessa.

135*. *Osoita, että a) nelikulmio* $ABCD$ *on suunnikas, jos ja vain jos* $AB = DC$ *ja* $AD = BC$*; b) nelikulmio* $ABCD$ *on suunnikas, jos* $AB \| DC$ *ja* $AB = DC$*; c) jos* $ABCD$ *on suunnikas, niin* AC *ja* BD *leikkaavat toisensa kummankin janan keskipisteessä ja d)* $ABCD$ *on neljäkäs, jos ja vain jos* AC *ja* BD *ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

Kolmioiden yhtenevyyden ohella kolmioiden *yhdenmuotoisuus* on geometrisen todistamisen perustyökalu. Yhdenmuotoisuus edellyttää janojen pituuksien suhteen määrittämistä, ja siinä lähtökohtana on seuraava havainto:

136. *Olkoot* ℓ_1 *ja* ℓ_2 *suoria ja pisteet* A, B *ja* C *sellaiset suoran* ℓ_1 *pisteet, että* $AB = BC$. *Olkoot* D, E *ja* F *sellaiset suoran* ℓ_2 *pisteet, että* $AD \| BE \| CF$.

Silloin $DE = EF$. Kääntäen, jos pisteet A, B, C; D, E, F ovat suorilla ℓ_1 ja ℓ_2 niin, että $AB = BC$ ja $AD \| BE$ sekä $DE = EF$, niin $CF \| BE$.



Väitteen todistamiseksi piirretään D:n ja E:n kautta ℓ_1:n suuntaiset suorat. Näistä edellinen leikkaa BE:n pisteessä G ja jälkimmäinen CF:n pisteessä H. Nyt $ABGD$ ja $BCHE$ ovat suunnikkaita, joten $DG = AB = BC = EH$. Suorien yhdensuuntaisuudesta seuraa, että $\angle EDG = \angle FEH$ ja $\angle DGE = \angle EHF$, joten kolmiot DGE ja EHF ovat yhteneviä (ksk). Siis $DE = EF$. Käänteinen väite seuraa yhdensuuntaisaksioomasta.

Kolmiot ABC ja DEF ovat *yhdenmuotoisia*, jos niiden vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuria ja jos jokaisen vastinsivuparin pituuksien suhde on sama. Yhdenmuotoisuutta merkitään $ABC \sim DEF$. "Sivujen pituuksien suhde" on hiukan vaikea käsite. Soveltamalla tulosta 136 on kuitenkin aika helppo vakuuttua siitä, että jos AB ja AC ovat kaksi puolisuoraa ja pisteet B' ja C' ovat suorilla puolisuorilla AB ja AC niin, että $B'C' \| BC$, niin $AB : AC = AB' : AC'$. Kääntäen, jos $AB : AC = AC : AE$, niin $BC \| DE$.

Niin kuin yhtenevyys, myös yhdenmuotoisuus toteutuu lievemminkin ehdoin. Yhdenmuotoisuuskriteerejä on neljä, ja niistä käytetään samalla periaatteella muodostettuja lyhennenimiä kuin yhtenevyyskriteereistä. Yhdenmuotoisuuskriteerit ovat kk, sks, sss ja ssk. Yhdenmuotoisuuskriteerit voidaan perustella nojautumalla edellisessä kappaleessa mainittuun tulokseen.

137*. *Perustele yhdenmuotoisuuskriteerit.*

Janan AB *keskinormaali* on janan keskipisteen M kautta kulkeva janaa AB vastaan kohtisuora suora. Yhtenevyyskriteerien sks ja ssk avulla on helppo osoittaa, että AB:n keskinormaali on niiden pisteiden P joukko, joille $AP = BP$. Kolmion sivujen AB ja BC keskinormaalit leikkaavat; jos leikkauspiste on O, niin $AO = BO = CO$. Piste O on siis myös sivun CA keskinormaalilla, eli kaikkien kolmen kolmion sivun keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä.

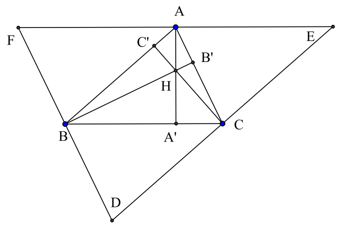
Kulman $\angle ABC$ *puolittaja* on sellainen puolisuora BD, että $\angle ABD = \angle DBC$. Pisteen P etäisyys suorasta ℓ määritellään valitsemalla se ℓ:n piste Q, jolle $PQ \perp \ell$ ja sopimalla, että mainittu etäisyys on janan PQ pituus. Tässä Q:ta sanotaan P:n *kohtisuoraksi projektioksi* suoralla ℓ. Yhtevyyskriteerin kks avulla nähdään, että kulmanpuolittajan jokaisen pisteen etäisyys kulman kyljistä eli puolisuorista BA ja BC on sama.

Jos I on kolmion ABC kulmien $\angle ABC$ ja $\angle BCA$ leikkauspiste, ja D, E ja F ovat I:n kohtisuorat projektiot suorilla BC, CA ja AB, niin $IF = ID = IE$ ja suorakulmaiset kolmiot AFI ja AEI ovat yhteneviä (ssk). Siis $\angle IAF = \angle IAE$, eli I on kolmion kolmannenkin kulmanpuolittajan piste: kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä.

Seuraavalla tuloksella, *kulmanpuolittajalauseella*, on paljon käyttöä geometrian tehtävien ratkaisuissa.

138*. *Osoita, että kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.*

Kolmion kärjestä piirretty jana, joka yhdistää kärjen sen vastakkaisella sivulla tai sivun jatkeella olevaan kärjen kohtisuoraan projektioon, on kolmion *korkeusjana* ja suora, josta tämä jana on osa, on kolmion *korkeussuora*. Kolmion kärkien kohtisuoria projektioita kolmion sivuilla kutsutaan korkeusjanojen *kantapisteiksi*.

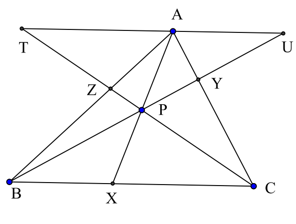


Korkeussuorien leikkausominaisuus nähdään, kun piirretään kolmion ABC kärkien kautta kolmion sivujen suuntaiset suorat. Olkoot niiden leikkauspisteet D, E ja F, niin että $DE \| AB$, $EF \| BC$ ja $FD \| CA$. Silloin $ABDC$ ja $ABCE$ ovat suunnikkaita, joten $DC = BA = CE$. C on siis janan DE keskipiste. Samoin nähdään, että A on janan EF ja B janan FD keskipiste. Koska korkeusjana CC' on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, on $CC' \perp DE$. Siis suora CC' on DE:n keskinormaali. Myös AA' ja BB' ovat kolmion DEF sivujen keskinormaaleja. Ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tätä pistettä H, siis kolmion ABC korkeussuorien leikkauspistettä, kutsutaan kolmion ABC *ortokeskukseksi*.

Kolmion sivujen keskinormaalien, kolmion kulmanpuolittajien ja kolmion korkeusjanojen leikkauspisteet ovat esimerkkejä *kolmion merkillisistä pisteistä*. Kilpailutehtävissä saatetaan hyödyntää seuraavaa *Cevan*[1] *lausetta*, joka antaa yhtenäisen keinon päätellä kolmion merkillisiä pisteitä.

139. *Kolmion ABC kärjistä vastakkaisten sivujen pisteisiin X, Y ja Z piirretyt janat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, jos ja vain jos*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \tag{1}$$



Cevan lauseen todistamiseksi oletetaan ensin, että AX, BY ja CZ leikkaavat pisteessä P. Piirretään A:n kautta BC:n suuntainen suora. Puolisuorat BY ja CZ leikkaavat sen pisteissä U ja T. Yhdensuuntaisuudesta ja ristikulmista syntyvien yhtä suurten kulmaparien ja yhdenmuotoisuuskriteeri kk:n ansiosta kuvioon syntyy neljä yhdenmuotoisten kolmioiden paria:

[1] *Giovanni Ceva* (1647–1734), italialainen matematiikko.

$BXP \sim UAP$, $CXP \sim TAP$, $BCY \sim UAY$ ja $BCZ \sim ATZ$. Näistä saadaan samassa järjestyksessä suhdeyhtälöt

$$\frac{BX}{XP} = \frac{AU}{AP}, \quad \frac{XP}{XC} = \frac{AP}{AT}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{BC}{AU}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{AT}{BC}.$$

Kun yllä olevat neljä verrantoa kerrotaan puolittain keskenään ja supistetaan, jää yhtälö (1). Jos sitten pisteet X, Y, Z ovat sellaisia, että yhtälö (1) toteutuu, voidaan olettaa, että BY ja CZ leikkaavat pisteessä P. Jos AP leikkaa BC:n pisteessä X', niin jo todistetun mukaan

$$\frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Mutta tästä ja (1):stä seuraa, että

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BX'}{X'C}.$$

On helppo nähdä, että tämä pätee vain, kun $X' = X$; nyt siis myös AX kulkee pisteen P kautta.

Kolmion kärkiä joihinkin vastakkaisten sivujen pisteisiin yhdistäviä janoja kutsutaan toisinaan *ceviaaneiksi*.

Kolmion kärjet vastakkaisten sivujen keskipisteisiin yhdistävät janat ovat kolmion *keskijanoja* eli *mediaaneja*. Cevan lauseesta seuraa heti, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tätä pistettä kutsutaan kolmion *painopisteeksi*.

140*. *Osoita, että kolmion painopiste jakaa mediaanit suhteessa* 2 : 1.

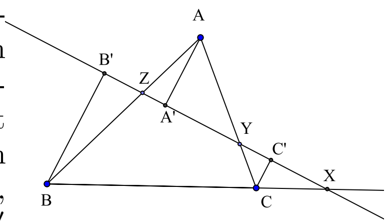
Cevan lauseen kanssa samanhenkinen tulos on myös kilpatehtävän ratkaisijan työkaluihin kuuluvaksi oletettava *Menelaoksen*[1] *lause*

141. *Kolmion ABC kahdella sivuilla AB ja AC sekä sivun BC jatkeella olevat pisteet Z, Y ja X ovat samalla suoralla jos ja vain jos*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \tag{1}$$

Sama pätee myös, jos kaikki kolme pistettä ovat vastaavien sivujen jatkeilla.

Jos suorille AB, BC ja CA määritellään kullekin suunta ja janan pituus määritellään etumerkillisenä lukuna, niin kaavan (1) oikean puolen luku 1 on korvattava luvulla -1. Tällöin Cevan ja Menelaoksen lauseiden sisällöt erottuvat toisistaan paremmin. Menelaoksen lauseen todistamiseksi oletetaan ensin, että X, Y ja Z ovat samalla suoralla. Jos A', B' ja C'



[1] *Menelaos Aleksandrialainen* (n. 70 – n. 130), kreikkalainen matemaatikko.

ovat pisteiden A, B ja C kohtisuorat projektiot tällä suoralla, niin väite seuraa jokseenkin suoraan siitä, että kaavan (1) kolme tulontekijää löytyvät kolmen yhdenmuotoisen suorakulmaisen kolmion parin $AA'Z \sim BB'Z$, $BB'X \sim CC'X$, $AA'Y \sim CC'Y$ synnyttämistä verrantoyhtälöistä. Lauseen käänteisen puolen todistamiseksi käytetään samaa tekniikkaa kuin Cevan lauseen käänteisen puolen todistamisessa.

Tärkeä työkalu geometriassa on luonnollisesti *Pythagoraan lause*.

142*. *Kolmion sivujen pituudet ovat a, b, c, missä $a < c$ ja $b < c$. Osoita, että kolmio on suorakulmainen, jos ja vain jos $a^2 + b^2 = c^2$.*

* * *

Muutama kilpailutehtävä:

143*. *Kolmiossa ABC on $AB > AC$ ja M sivun BC keskipiste ja AL on kulman A puolittaja. Pisteen M kautta kulkeva AL:ää vastaan kohtisuora suora leikkaa sivun AB pisteessä D. Osoita, että $AD + MC$ on sama kuin kolmion ABC piirin puolikas.* (Ukrainan matematiikkaolympialaiset vuonna 2004.)

144*. *Kolmion ABC jokaiselle sivuille on piirretty tasakylkinen kolmio; kolmiot ovat PAB (PA=PB), RBC (RB=RC) ja QAC (QA=QC), ne ovat yhdenmuotoisia ja PAB sekä QAC ovat ABC:n ulkopuolella, mutta RBC on samalla puolella suoraa BC kuin ABC. Osoita, että nelikulmio $APRG$ on suunnikas.* (Australian matematiikkaolympialaiset vuonna 1984)

145*. *BB_1 ja CC_1 ovat teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanoja ja H on kolmion ortokeskus. A:n kautta kulkeva suora ℓ on kohtisuorassa AC:tä vastaan. Osoita, että suorat BC, B_1C_1 ja ℓ leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos H on BB_1:n keskipiste.* (Valko-Venäjän matematiikkaolympialaiset vuonna 2005)

146*. *Neliön $ABCD$ sivu on a. Suorat ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaisia, ja niiden etäisyys toisistaan on a. Suora ℓ_1 leikkaa neliön sivut AB ja AD pisteissä E ja F. Vastaavasti suora ℓ_2 leikkaa neliön sivut CB ja CD pisteissä G ja H. Kolmioiden AEF ja CGH piirien pituudet ovat m_1 ja m_2. Osoita, että riippumatta siitä, missä asennossa neliö ja suorat ovat, $m_1 + m_2$ on vakio.* (Aasian ja Tyynenmeren matematiikkaolympialaiset vuonna 2003)

7.1.2 Ympyrä

Ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde r, on niiden pisteiden P joukko, joille $OP = r$.

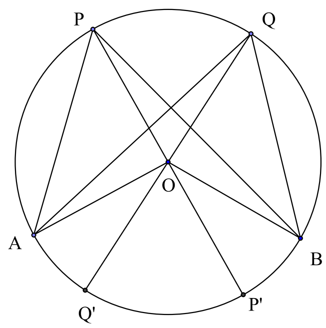
Kolmion keskinormaalien leikkauspiste on yhtä etäällä kolmion jokaisesta kärjestä. Jokaisen kolmion kaikkien kärkien kautta kulkee siis jokin ympyrä. Kutsumme sitä kolmion *ympärysympyräksi* tai kolmion *ympäri piirretyksi ympyräksi*.

Suora, joka leikkaa ympyrää tasan yhdessä pisteessä on ympyrän *tangentti*; ympyrän ja tangentin yhteinen piste on *sivuamispiste*. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä ympyrän sädettä vastaan (numero 11). Jos O-keskisen ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä P piirretään ympyrälle kaksi tangenttia ja niiden sivuamispisteet ovat A ja B, niin ssk-yhtenevistä suorakulmaisista kolmioista OAP ja OBP saadaan $AP = BP$.

Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä I; jos I:n kohtisuorat projektiot kolmion sivuilla ovat D, E ja F, niin kolmion sivut ovat I-keskisen ja ID-säteisen ympyrän tangentteja. Tämä ympyrä on kolmion *sisäympyrä* eli sisään piirretty ympyrä. Kolmion kulmien vieruskulmien puolittajat ovat yhtä etäällä kulman molemmista kyljistä. Kolmion yhden kulman ja kahden muun kulman vieruskulmien puolittajat leikkaavat samassa pisteessä ja tämä piste keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa kolmion yhtä sivua ulkopuolelta ja kahden muun sivun jatketta. Tällaista ympyrää (niitä on kolme kappaletta) kutsutaan kolmion *sivuympyräksi.*

Ympyrän ominaisuuksista keskeisimpiä kilpailumatematiikan kannalta on *kehäkulmalause*.

147. *Olkoon AB O-keskisen ympyrän jänne ja P ja Q kaksi samalla puolella suoraa AB olevaa ympyrän kehän pistettä. Silloin $\angle APB = \angle AQB$.*



Kehäkulmalauseen todistuksessa on eri tapauksia sen mukaan, millä puolella kulmien kylkiä ympyrän keskipiste O on. Tapaukset ovat toistensa kaltaisia, joten tyydytään tarkastelemaan tilannetta, jossa O on molempien yhtä suuriksi väitettyjen kulmien aukeamassa. Olkoot P' ja Q' suorien PO ja QO ja ympyrän toiset leikkauspisteet. Kolmiot OPA, OPB, OQA ja OBQ ovat kaikki tasakylkisiä. Koska kolmion kulman vieruskulma on yhtä suuri kuin kolmion kahden muun kulman summa, on siis $\angle AOP' = 2 \cdot \angle APO$ ja $\angle BOP' = 2 \cdot \angle APB$. Samoin $\angle AOQ' = 2 \cdot \angle AQO$ ja $\angle BOQ' = 2 \cdot \angle OQB$. Mutta tästä seuraa $\angle APB = \angle APO + \angle OPB = \frac{1}{2}(\angle AOP' + \angle BOP') = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB = \frac{1}{2}(\angle AOQ' + \angle BOQ') = \angle AQO + \angle OQB = \angle AQB$.

Edellistä todistusta mukailemalla voi päätellä, että jos AD on ympyrän tangentti, sivuamispiste A, ja jos CB on ympyrän jänne niin, että C ja D ovat eri puolilla suoraa AB, niin $\angle CAB = \angle DAB$.

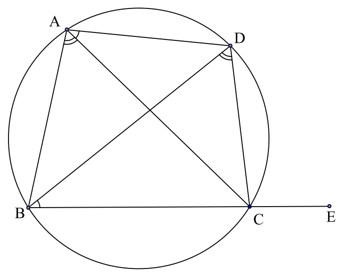
Kehäkulmalauseen sisältö ilmaistaan usein sanomalla, että ”samaa kaarta (tai samaa jännettä) vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret”.

Kehäkulmalauseen erikoistapauksena voi pitää *Thaleen*[1] *lausetta*:

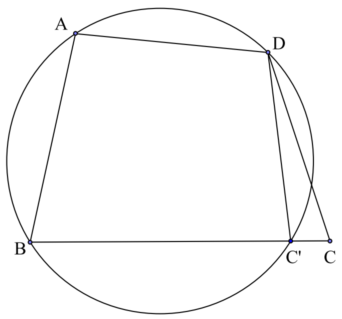
148*. *Jos AB on ympyrän halkaisija ja C on ympyrän kehän piste, niin $\angle BCA$ on suora; jos A, B, C ovat ympyrän kehän pisteitä ja $\angle BCA$ on suora, niin AB on ympyrän halkaisija.*

Kehäkulmalauseen välitön seuraus on tärkeä kriteeri, joka määrittää ympyrän *sisään piirretyn nelikulmion* eli *jännenelikulmion*.

149. *Jos $ABCD$ on jännenelikulmio, sen jokainen kulma on yhtä suuri kuin vastakkaisen kulman vieruskulma. Jos nelikulmiossa $ABCD$ jokin kulma on yhtä suuri kuin vastakkaisen kulman vieruskulma, nelikulmio on jännenelikulmio.*



Väitteen todistamiseksi oletetaan, että $ABCD$ on jännenelikulmio. Olkoon E piste sivun BC jatkeella. Käytetään hyväksi sitä, että kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, ja kehäkulmalausetta. Saadaan $\angle DCE = \angle DBC + \angle BDC = \angle CAD + \angle BAC = \angle BAD$.



Toiseen suuntaan todistus on epäsuora. Oletetaan, että $\angle BAD$ ja kulman $\angle BCD$ vieruskulma ovat yhtä suuret. Kolmion ABD ympäri voidaan piirtää ympyrä. Ellei se kulje C:n kautta, niin C on joko ympyrän ulkopuolella tai sisäpuolella. Oletetaan, että C on ulkopuolella. Silloin jana BC leikkaa ympyrän jossain pisteessä C'. Koska $ABC'D$ on jännenelikulmio, myös $\angle DC'C$ on kulman BAD vieruskulma. Mutta kolmiossa $DC'C$ kulma $\angle DC'C$ on pienempi kuin kulman $\angle DCC'$ vieruskulma. Ristiriita! Samanlainen ristiriita syntyy oletuksesta, että C olisi kolmion ABD ympärysympyrän ulkopuolella.

Varsin monissa geometrian kilpailutehtävissä ratkaisuun johtava oivallus on löytää tehtävän kuviosta sellaisia ominaisuuksia, joiden perusteella jotkin neljä pistettä ovat jännenelikulmion kärkiä, ja sitten käyttää kehäkulmalausetta yhtä suurten kulmien paikallistamiseen.

[1] *Thales Miletoslainen* (n. 600 eaa.) kreikkalainen; ensimmäinen nimeltä tunnettu matemaatikko.

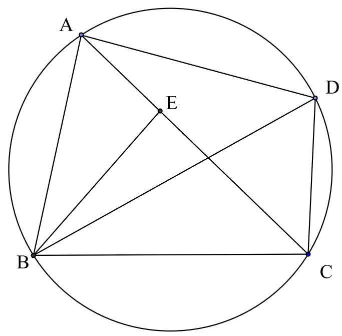
Kehäkulmalauseen ja jännenelikulmion ohella tavallisia ympyrään liittyviä tehtävänratkaisutyökaluja ovat *pisteen potenssi ympyrän suhteen* ja *Ptolemaioksen*[1] *lause.*

150*. *Oletetaan, että piste P ei ole ympyrän Γ kehällä. Jos P:n kautta piirretyt kaksi suoraa leikkaavat Γ:n pisteissä A, B ja C, D, niin $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Jos P:n kautta piirretty Γ:n tangentti sivuaa Γ:aa pisteessä E, niin $PA \cdot PB = PE^2$.*

Koska tulo $PA \cdot PB$ ei riipu siitä, mitä P:n kautta kulkevaa suoraa tarkastetaan, tulo on vain P:stä riippuva. Sitä sanotaan P:n potenssiksi Γ:n suhteen. – Tavanomaisella epäsuoralla todistuksella nähdään, että ehdon $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ voimassa olo takaa pisteiden A, B, C, D sijaitsemisen samalla ympyrällä.

Ptolemaioksen lause liittyy jännenelikulmioihin:

151. *Jos $ABCD$ on jännenelikulmio, niin $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Jos nelikulmio $ABCD$ ei ole jännenelikulmio, niin $AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD$.*



Ptolemaioksen lauseen ensimmäisen osan todistamiseksi valitaan janalta AC piste E niin, että $\angle ABE = \angle DBC$. Koska kehäkulmalauseen perusteella $\angle BAE = \angle BDC$, kolmiot ABE ja DBC ovat yhdenmuotoisia (kk). Tästä seuraa

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$$

eli $AB \cdot CD = AE \cdot BD$. Mutta kehäkulmalauseen nojalla kulma $\angle BEC$ eli kulman $\angle BEA = \angle BCD$ vieruskulma on sama kuin kulma $\angle DAB$. Edelleen kehäkulmalauseen perusteella $\angle BCE = \angle BDA$. Siis myös $BCE \sim BDA$ (kk) ja

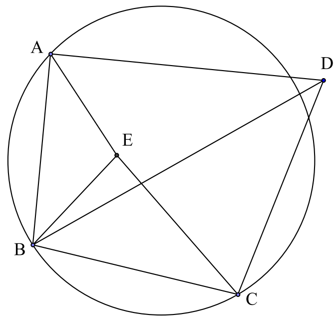
$$\frac{BC}{EC} = \frac{BD}{AD}$$

eli $BC \cdot AD = EC \cdot BD$. Saadaan $AB \cdot CD + BC \cdot AD) = (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD$.

Lauseen jälkimmäisen osan todistusta varten tarkastellaan nelikulmiota $ABCD$, joka ei ole jännenelikulmio. Piirretään kolmio $ABE \sim DBC$; nyt on jälleen

[1] *Klaudios Ptolemaios* (n. 85 – n. 165), kreikkalainen tähtitieteilijä.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}.$$



Koska $\angle ABE = \angle DBC$, niin $\angle ABD = \angle EBC$. Lisäksi

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC}.$$

Siis $BCE \sim BDA$ (sks) ja

$$\frac{EC}{AD} = \frac{BC}{BD}.$$

Päädytään jälleen yhtälöön $AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AE + EC) \cdot BD$. Mutta nyt kulman $\angle AEB = \angle BCD$ vieruskulma ei ole $\angle DAB = \angle CEB$, joten A, E ja C eivät ole samalla suoralla. Siis $AE + EC > AC$, ja toinen puoli lauseesta on todistettu.

* * *

Muutama geometrian kilpailutehtävä, joissa ympyrälläkin on osansa.

152*. *Neliön $ABCD$ sivuilta AB ja BC valitaan pisteet E ja F niin, että $BE = BF$. BN on kolmion BCE korkeusjana. Osoita, että $\angle DNF$ on suora kulma.* (Itävallan ja Puolan matematiikkamaaottelu vuonna 1979.)

153*. *Kolme samasäteistä ympyrää kulkee pisteen P kautta. Ympyröiden toiset leikkauspisteet ovat A, B ja C. Osoita, kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde on sama kuin tehtävän kolmen muun ympyrän.* (Itävallan matematiikkaolympialaiset vuonna 1977.)

154*. *Piste L on neliön $ABCD$ ympäri piirretyn ympyrän (lyhyemmällä) kaarella CD. Suorien AL ja CD leikkauspiste on K ja suorien AD ja CL leikkauspiste on M. Suorat MK ja CB leikkaavat toisensa pisteessä N. Osoita, että pisteet B, L, M ja N ovat samalla ympyrällä.* (Tšekinmaan ja Slovakian matematiikkaolympialaiset vuonna 2003.)

155*. *Olkoot C_1 ja C_2 kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon S C_1:n keskipiste ja T C_2:n keskipiste. Olkoon P janan AB jokin sellainen piste, että $AP \neq= BP$ ja $P \neq A$, $P \neq B$. Piirretään P:n kautta SP:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_1:n leikkauspisteitä C:llä ja D:llä. Piirretään samoin P:n kautta TP:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_2:n leikkauspisteitä E:llä ja F:llä. Osoita, että C, D, E ja F ovat erään suorakaiteen kärkipisteet.* (Pohjoismainen matematiikkakilpailu vuonna 1998.)

7.2 Trigonometria

Kilpailutehtävissä on harvoin tehtäviä, joiden ratkaisemiseen tarvitaan pelkästään trigonometristen funktioiden ominaisuuksia. Geometristen tehtävien ratkaisemisessa on usein käyttöä *sini-* ja *kosinilauseilla*, ja niiden yhteydessä on hyötyä trigonometristen funktioiden perusominaisuuksista. Ne on johdettavissa sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista.

156*. *Perustele kaavat*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Yhteenlaskukaavoja ja trigonometristen funktioiden perusominaisuuksia, kuten kosinifunktion parillisuutta ($\cos(-x) = \cos x$) ja sinifunktion parittomuutta ($\sin(-x) = -\sin x$), soveltamalla voidaan johtaa suuri määrä hyödyllisiä identiteettejä. Jos esimerkiksi sinin yhteenlaskukaavassa y vaihdetaan $-y$:ksi, saadaan $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos \sin y$, ja jos tähän ja sinin yhteenlaskukaavaan sijoitetaan $x + y = t$ $x - y = u$, ja kaavat lasketaan puolittain yhteen, saadaan $\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{1}{2}(t+u) \cos \frac{1}{2}(t-u)$.

Kun yhteenlaskukaavoissa asetetaan $x = y$, saadaan tärkeät kaksinkertaisen kulman sinin ja kosinin lausekkeet $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ja $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Pythagoraan lauseesta seuraavan identiteetin $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ avulla kaksinkertaisen kulman kosinin lauseke muuntuu muotoon $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Sini- ja kosinilauseet kytkevät yhteen kolmion sivujen pituuksia ja kolmion kulmien trigonometrisiä funktioita. Käytetään seuraavassa tavallisia merkintäsopimuksia: jos ABC on kolmio, niin $AB = c$, $BC = a$ ja $CA = b$ sekä $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ ja $\angle CAB = \alpha$. Sinilause on usein hyödyllisin laajennetussa muodossaan, joka ottaa huomioon kolmion ympärysympyrän säteen:

157. *Jos kolmion ABC ympärysympyrän säde on R, niin*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Sinilauseen todistusta varten valitaan kolmion ABC ympärysympyrältä piste A' niin, että $A'B$ on ympyrän halkaisija. Silloin $A'B = 2R$, $\angle BCA'$ on suoja ja kehäkulmalauseen perusteella $\angle BA'C = \angle BAC = \alpha$. Näin ollen $a = 2R\sin\alpha$. Aivan samoin johdetaan muut sinilauseen yhtälöt $b = 2R\sin\beta$ ja $c = 2R\sin\gamma$.

Kosinilause kytkee yhteen kolmion kaikkien sivujen pituudet ja yhden kulman kosinin:

158. *Kolmiossa ABC on*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Kosinilause voidaan johtaa laskemalla puolittain yhteen sinilauseesta seuraava yhtälö $(b\sin\gamma - c\cos\beta)^2 = 0$ ja yhtälö, joka saadaan, kun kolmion sivu $BC = a$ lausutaan sivujen AB ja AC projektioiden summana: $(c\cos\beta + b\cos\gamma)^2 = a^2$. Kun poistetaan sulkeet, käytetään kaavaa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ja kosinin yhteenlaskukaavaa, saadaan $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\beta + \gamma)$. Lopulliseen muotoon päästään, kun otetaan huomioon, että $\cos(\beta + \gamma) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Kolmion pinta-ala on $T = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$. Kosinilauseen avulla tästä voidaan johtaa monesti tarpeellinen *Heronin*[1] *kaava.*

159*. *Osoita, että jos $a + b + c = 2p$, niin kolmion ala on*

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Jos kolmion sisäympyrän säde on r, niin kolmion ala on summa saadaan laskemalla kolmen osakolmion, joiden kantoina ovat kolmion sivut ja korkeutena r, alat yhteen. Kolmion ala on näin laskien $T = pr$. Heronin kaavan nojalla siis

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r}}.$$

* * *

Muutama kilpailutehtävä, joiden ratkaisussa voi trigonometriasta olla iloa:

160*. *Suorakaiteessa ABCD $AB = 3 \cdot BC$. Pisteet P ja Q jakavat janan AB kolmeen yhtä pitkään osaan ja P on janalla AQ. Osoita, että $\angle CAB + \angle CPB = \angle CQB$.* (Kanadan matematiikkaolympialaiset vuonna 1974.)

161*. *Olkoon AD kolmion ABC keskijana, E sellainen suoran AD piste, että $CE \perp AD$. Oletetaan vielä, että $\angle ACE = \angle ABC$. Osoita, että kolmio ABC on tasakylkinen tai suorakulmainen.* (Australian matematiikkaolympialaiset vuonna 2003.)

---

[1] *Heron Aleksandrialainen*, (n. 10–75) kreikkalainen matemaatikko ja insinööri.

162*. *Kolmioiden ABC ja UVW sivujen a, b, c ja u, v, w kesken vallitsevat yhtälöt*

$$u(v+w-u) = a^2,$$
$$v(w+u-v) = b^2,$$
$$w(u+v-w) = c^2.$$

Osoita, että ABC on teräväkulmainen ja lausu kolmion kolmion UVW kulmat U, V, W kolmion ABC kulmien avulla. (Ison-Britannian matematiikkaolympialaiset vuonna 1996.)

163*. *Kolmion ABC kulman A puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Olkoon $AB = c$, $AC = b$, $AD = w$, $BD = v$ ja $CD = u$. Osoita, että $w^2 = bc - uv$.* (Saksan matematiikkaolympialaiset vuonna 2003.)

7.3 Geometriset kuvaukset

Geometrian tehtävien ratkaisussa saattaa olla hyötyä tason geometrisista kuvauksista. Niissä tason pisteet ja kuviot siirtyvät uuteen asemaan ja mahdollisesti muuttavat kokoaan tai muotoaan. *Yhtenevyyskuvauksissa* kuviot kuvautuvat alkuperäisen kanssa yhteneviksi kuvioiksi. Yhtenevyyskuvauksia ovat tason *siirto*, *peilaus* yli suoran ja *kierto* kiinteän pisteen ympäri sekä näistä yhdistetyt kuvaukset. Tärkein *yhdenmuotoisuuskuvaus* on *homotetia*. Homotetia yhdistettynä yhtenevyyskuvauksiin on edelleen yhdenmuotoisuuskuvaus. Toisinaan kilpailutehtävien ratkaisussa voi olla iloa myös *inversiokuvauksista* eli ympyräpeilauksista. Niitä ei tässä lähemmin käsitellä.

Useimmat kuvausten ominaisuudet seuraavat melko suoraan niiden määritelmistä ja yksinkertaisista geometrian perusteista. Siirron määrittelee kiinteä jana AB; pisteen P kuva P' on se piste, jolle $ABP'P$ on suunnikas (ja kun A, B ja P ovat samalla suoralla, suunnikkaan surkastuma). Peilauksessa yli suoran ℓ pisteen P kuva P' on se piste, jolle ℓ on janan PP' keskinormaali. Kierrossa pisteen O ympäri kulman α verran P:n kuva P' on se piste, jolle $OP' = OP$ ja $\angle POP' = \alpha$; kierron yhteydessä on kiinnitettävä kiertosuunta. Yhtenevyyskuvauksissa jokainen jana kuvautuu yhtä pitkäksi janaksi ja siten jokainen kolmio alkuperäisen kanssa yhteneväksi kolmioksi. Jos suorat ovat yhdensuuntaiset, myös niiden kuvasuorat ovat yhdensuuntaiset.

Homotetiakuvaukseen liittyy piste O, jota sanotaan *homotetiakeskukseksi* ja reaalilukukerroin $k \neq 0$, *suurennussuhde*. Jos $k > 0$, pisteen P kuva on se puolisuoran OP piste, jolle $OP' = k \cdot OP$, ja jos $k < 0$, se puolisuoralle OP vastakkaisen puolisuoran piste, jolle $OP' = |k| \cdot OP$. Homotetiakuvaus kuvaa jokaisen janan AB janaksi $A'B'$ niin, että $A'B' = |k| \cdot AB$. Yhdenmuotoisuuskriteeristä sss seuraa, että jokainen kolmio kuvautuu alkuperäisen kanssa yhdenmuotoiseksi kolmioksi. Yhdensuuntaisten suorien kuvat ovat yhdensuuntaisia.

*   *   *

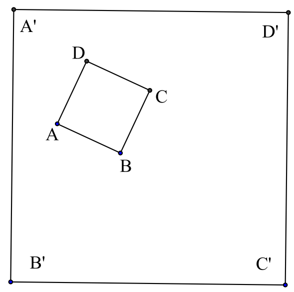
Esitellään kuvausten käyttöä vain muutaman kilpailutehtävän avulla.

164*. *On annettu ympyrä, jonka säde on r. Selvitä, miten piirretään neliö, jonka yksi sivu on ympyrän tangentti ja vastakkainen sivu ympyrän jänne.* (Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 1987.)

165*. *Ympyröiden k_1 ja k_2 säde on sama kuin niiden keskipisteiden etäisyys. Ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Valitaan k_2:n piste C niin, että jana BC leikkaa k_1:n myös pisteessä L ja suora CA leikkaa k_1:n myös pisteessä L. Osoita, että kolmion CKL pisteestä C piirretty mediaanisuora kulkee C:n sijainnista riippumatta saman pisteen kautta.* (Tšekin tasavallan ja Slovakian matematiikkaolympialaiset vuonna 2012.)

166*. *Kolmion ABC kulmat ovat pienempiä kuin $120°$. Kolmion ulkopuolelle piirretään tasasivuiset kolmiot AFB, BDC ja CEA. a) Osoita, että suorat AD, BE ja CF kulkevat saman pisteen S kautta. b) Osoita, että $SD+SE+SF = 2(SA+SB+SC)$.* (Australian matematiikkaolympialaiset vuonna 1985.)

167*. *Neliöt $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ esittävät kahta samasta alueesta tehtyä karttaa. Osoita, että kun kartat laitetaan päällekkäin (niin kuin oheisessa kuvassa), niin on olemassa yksi ja vain yksi piste, joka edustaa samaa maastonkohtaa ja jonka karttakuvat ovat päällekkäin saman pisteen kohdalla.* (USA:n matematiikkaolympialaiset vuonna 1978.)



7.4 Analyyttinen geometria, vektorit ja kompleksiluvut

Geometriset tehtävät tai niiden osat voidaan usein eri tavoin palauttaa algebraan. Yksi tapa on *analyyttinen geometria* eli koordinaattigeometria. Kun tasoon asetetaan suorakulmainen xy-koordinaatisto, niin suorat ovat joukkoja, joiden pisteet (x, y) toteuttavat ensimmäisen asteen yhtälön $ax+by+c = 0$ ja ympyrät ovat joukkoja, joiden pisteet toteuttavat toisen asteen yhtälön $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Kahden kuvion leikkauspisteiden koordinaatit toteuttavat molempiin kuvioihin liittyvän yhtälön, joten leikkauspisteet voidaan periaatteessa aina määrittää ratkaisemalla ensimmäisen tai toisen asteen yhtälöpari.

Erityisesti (jos $x_1 \neq x_2$) kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoraa vastaa ensimmäisen asteen yhtälö

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(joka on muotoa $y = kx+b$) ja r-säteistä ympyrää, jonka keskipiste on (x_0, y_0), toisen asteen yhtälö

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys on

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Kulmiin voi päästä käsiksi mm. sen kautta, että suoran yhtälössä $y = kx + b$ k on suoran ja x-akselin välisen kulman tangentti. Suorat $y = kx + b$ ja $y = -\frac{1}{k}x + c$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (miksi?).

168*. *Selvitä, mikä on ympyrän $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ keskipiste ja säde.*

169*. *Osoita, että ympyrän $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ pisteeseen (x_1, y_1) piirretyn tangentin yhtälö on $(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$.*

Kilpatehtävien asettamisessa on tavallista, että tehtävät pyritään laatimaan niin, että aivan helppoa analyyttisen geometrian ratkaisua ei löytyisi. Usein myös viattomiin, mutta mahdollisesti ratkaisun väärille raiteille johtaviin laskuvirheisiin suhtaudutaan ankarammin kuin muihin vastaaviin pieniin rikkeisiin. Tämä ei kuitenkaan estä yrittämästä. Oikea analyyttisiin menetelmiin perustuva ratkaisu on samanarvoinen muilla menetelmissä saatuihin nähden.

Koordinaattigeometrian keinoja käyttävässä ratkaisussa on syytä algebran yksinkertaistamiseksi valita mahdollisuuksien mukaan koordinaatisto niin, että akselit tai ainakin toinen niistä yhtyy johonkin tehtävän suoraan ja origoksi tulee jokin tehtävän piste. Usein esimerkiksi on mahdollista valita koordinaatisto niin, että tehtävässä olevan kolmion ABC kärjet ovat $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ ja $C = (t, u)$, missä $t > 0$ ja u ovat parametreja.

° * *

Muutamia esimerkkejä analyyttisen geometrian käytöstä kilpailutehtävissä.

170*. *Suorat m ja n ovat yhdensuuntaisia ja piste P on suorien rajaaman yhdensuuntaisvyön ulkopuolella. P:n kautta piirretään kolme eri suoraa ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Ne leikkaavat m:n pisteissä A_1, A_2, A_3 ja n:n pisteissä B_1, B_2, B_3. Olkoon vielä C_{ij} suorien A_iB_j ja A_jB_i leikkauspiste ($1 \le i < j \le 3$). Osoita, että pisteet C_{ij} ovat samalla suoralla, ja että tämä suora on m:n suuntainen.* (Itävallan *Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene*[1] -kilpailu vuonna 2003.)

171*. *Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija. Valitaan ympyrän kehältä piste C siten, että OC ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Olkoon P mielivaltainen (lyhemmän) kaaren BC piste ja leikatkoot suorat CP ja AB pisteessä Q. Valitaan R AP:ltä niin, että RQ ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että $BQ = QR$.* (Pohjoismainen matematiikkakilpailu vuonna 1995.)

[1] ”Edistyneiden aluekilpailu”.

172*. *ABC on kolmio. D on sivun AB keskipiste ja E on se sivun BC piste, jolle* $BE = 2 \cdot EC$ *ja* $\angle ADC = \angle BAE$. *Määritä* $\angle BAC$. (Brasilian matematiikkaolympialaiset vuonna 1998.)

173*. *On annettu neliö ABCD. Piste X liikkuu pitkin neliön lävistäjää BD. X:n kohtisuorat projektiot sivuilla AB ja AD ovat E ja F. Minkä käyrän janojen CF ja DE leikkauspiste Y piirtää, kun X kulkee yli janan BD?* (Saksan matematiikkaolympialaiset vuonna 2000.)

* * *

Kilpailutehtävien ratkaisussa voi analyyttisen eli koordinaattigeometrian ohella käyttää paria muuta laskennollista metodia. Erityisesti kolmiulotteiseen ympäristöön sijoittuvat tehtävät tai tasotehtävät, joihin ei liity ympyröitä, saattavat ratketa vektorilaskennan avulla. Keskeinen vektorilaskennan keino on kahden vektorin $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ pituuden ja niiden välisen kulman $(\vec{v}, \vec{u})$ toisiinsa kytkevä yhteenlaskun suhteen osittelulakia totteleva *skalaaritulo* $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos(\vec{v}, \vec{u})$. Vektorien $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ kohtisuoruuden ehto on $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ja vektorin $\vec{v}$ pituus $|\vec{v}|$ palautuu muotoon $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

* * *

Seuraavassa muutama vektorilaskentaan liittyvä tai vektorilaskennan avulla ratkeava kilpailutehtävä.

174*. *Tetraedrin QRST särmien QR, ST, QS, RT, QT, RS keskipisteet ovat järjestyksessä A, B, C, D, E, F. Osoita, että janat AB, CD ja EF leikkaavat toisensa samassa pisteessä.* (Saksan matematiikkaolympialaiset vuonna 2006.)

175*. *On annettu neljä avaruuden pistettä A, B, C, D. Olkoot M ja N janojen AC ja BD keskipisteet. Osoita, että*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot MN^2.$$

(Puolan ja Itävallan matematiikkamaaottelu vuonna 1979.)

176*. *Tetraedrin ABCD vastakkaiset särmät ovat pareittain yhtä pitkiä ja niiden välinen kulma on sama. Osoita, että ABCD on säännöllinen tetraedri.* (Romanian matematiikkaolympialaiset vuonna 2004.)

177*. *Osoita, että kolmion keskijanat ovat aina jonkin kolmion sivut ja että jälkimmäisen kolmion mediaaneista muodostettu kolmio on alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoinen.* (Unkarin Eötvös-kilpailu vuonna 1940.)

* * *

Kompleksilukujen geometrinen tulkinta koordinaattipisteinä $(x, y) = x + iy$ tekee kompleksilukujen yhteenlaskusta ja vektorien yhteenlaskusta analogisia. Jos pistettä A vastaa kompleksiluku z ja pistettä B kompleksiluku w, niin janaa AB vastaa kompleksiluku $w - z$.

Kompleksilukujen erityinen käyttökelpoisuus johtuu niiden kertolaskun ja kulmien yhteenlaskun vastaavuudesta: kompleksilukujen tulon argumenttihan on tulon tekijöiden argumenttien summa. Silloin, kun kompleksiluvun z itseisarvo on 1, (jolloin $z = e^{i\phi}$) z:lla kertominen on sama asia kuin kierto z:n argumenttia ϕ vastaavalla kulmalla. Erityisesti $\pm i$:llä kertominen vastaa 90° kiertoa ja luvulla $e^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ tai sen liittoluvulla $e^{-i\pi/3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ kertominen 60° kiertoa.

Tyypillinen kompleksiluvuin(kin) ratkeava tehtävä on seuraava.

178. *Suunnikkaan $ABCD$ sivut kantoina piirretään suunnikkaan ulkopuolelle neljä neliötä. Osoita, että neliöiden keskipisteet ovat erään neliön kärjet.*

Laskentoa voi hiukan helpottaa valitsemalla mukavat merkinnät. Tässä on edullista valita suunnikkaan kärjiksi kompleksitason pisteet $A = 0$, $B = 2$, $C = 2 + 2z$ ja $D = 2z$. Suunnikkaan sivujen keskipisteet ovat silloin $E = 1$, $F = 2+z$, $G = 1+2z$ ja $H = z$. Neliöiden keskipisteisiin päästään siirtymällä suunnikkaan sivujen keskipisteistä kohtisuoraan sivua vastaan matka, joka on puolet sivun pituudesta. Näin ollen neliöiden keskipisteet ovat $M = 1 - i$, $N = 2 + z - iz$, $P = 1 + 2z + i$ ja $Q = z + iz$. Neliön sivuja vastaavat kompleksiluvut $MN = (2 + z - iz) - (1 - i) = 1 + i + (1 - i)z$, $NP = (1 + 2z + i) - (2 + z - iz) = -1 + i + (1 + i)z$, $PQ = (z + iz) - (1 + 2z + i) = -(1+i) - (1-i)z$ ja $QM = (1-i) - (z+iz) = -(-1+i) - (1+i)z$. Nähdään heti, että nelikulmion $MNPQ$ vastakkaisia sivuja vastaavat kompleksiluvut ovat toistensa vastalukuja, joten nelikulmio on neljäkäs, ja että $NP = iMN$, joten neljäkäs on suorakulmainen, siis neliö.

* * *

Vielä muutama kilpailutehtävä, joihin kompleksilukuratkaisu käy.

179*. Kolmion ABC kärjestä A piirretään puolisuora, joka puolittaa kolmion C kärjestä piirretyn keskijanan. Missä suhteessa puolisuora jakaa kolmion sivun BC? (Tanskan Georg Mohr -matematiikkakilpailu vuonna 1995.)

180*. Kolmion ABC sivun BC keskipiste on N. Kolmion sivut AB ja AC kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasakylkiset suorakulmaiset kolmiot BAM ja ACP. Osoita, että PMN on tasakylkinen suorakulmainen kolmio. (Iranin matematiikkaolympialaiset vuonna 1996.)

181*. *Kuusikulmio $ABCDEF$ on piirretty ympyrän sisään. Sivut AB, CD ja EF ovat ympyrän säteen pituisia. Osoita, että kuusikulmion kolmen muun sivun keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet.* (Unkarin Eötvös–Kürschak-kilpailu vuonna 1941.)

182*. *Puolisuunnikkaan $ABCD$ yhdensuuntaiset sivut ovat AB ja CD. Puolisuunnikkaan sivu AD kantana voidaan piirtää tasasivuinen kolmio, jonka kärki on sivulla BC. Osoita, että myös BC kantana voidaan piirtää tasasivuinen kolmio, jonka kärki on sivulla AD.* (Valko-Venäjän matematiikkaolympialaiset vuonna 2005.)

8 Tehtävien ratkaisuja

Matemaattisen tehtävän ”malliratkaisu” on usein petollinen. Tehtävä näyttää ratkaistuna helpolta. Moni ratkaisu on kuitenkin vaikea keksiä, koska siihen sisältyy jokin oivallus, jonka saaminen on kaikkea muuta kuin itsestään selvää. Tässä esitettävät kirjan tehtävien ratkaisuehdotukset on kirjoitettu lyhyesti, eikä monestikaan ole voitu perustella syitä, miksi juuri tietyllä tavalla on voitu päästä perille. Ratkaisijan on hyvä ratkaisuun tutustumisen jälkeen pohdiskella, miksi on ollut hyvä tehdä niin kuin tehtiin. – On itsestään selvää, että esitetyt ratkaisut eivät ole ainoita mahdollisia. Jos olet ratkaissut tehtävän eri tavoin kuin tässä esitetään, saatat hyvin olla oikeassa.

17. Ensimmäiset kaksi identiteettiä todistuvat tietysti suoralla laskulla. Kolmas on tunnettu identiteetti, kun $n = 2$ ja sama kuin toinen, kun $n = 3$. Yleisen tapauksen induktioaskel on ilmeinen. Jos kaava on tosi parametrin arvolla n, niin

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j + 2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} +2\sum_{1\le i<j\le n+1} a_i a_j.$$

Neljäs identiteetti on sama kuin ensimmäinen, kun $n = 2$. Induktio-oletuksena voidaan pitää yhtälöä $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Silloin $a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1} = a^n(a-b) + b(a^n - b^n) = (a-b)(a^n + b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$, joten induktioaskel voidaan ottaa ja identiteetti pätee kaikilla $n \ge 2$. Koska $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$, viides identiteetti palautuu neljänteen. Kuudennen identiteetin yksinkertaisin todistus perustunee kolmannen asteen polynomin tekijöihin jakoon (numero 30). Todistus suoralla laskulla eli ”raa'alla voimalla” voisi mennä näin: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) = (a+b)(a^2-ab+b^2)+c(c^2-3ab) = (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c(a^2-ab+b^2-c^2+3ab) = (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c((a+b)^2-c^2) = (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c((a+b+c)(a+b-c)) = (a+b+c)(a^2-ab+b^2-ac-ba+c^2)$. Viimeisen identiteetin todistus on lasku sekin: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 = (a^2c^2-2acbd+b^2d^2)+(a^2d^2+2adbc+b^2c^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

19. Kaava on selvästi tosi, kun $n = 1$. Jos se on tosi eksponentin arvolla n, niin

$$(a+b)^{n+1} = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.$$

Muutetaan ensimmäisessä summassa summausindeksiksi $m = k+1$. Silloin k on vaihdettava $m-1$:ksi ja saadaan

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n}{m-1}a^m b^{n+1-m} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.$$

Kun palautetaan summausindeksin nimeksi ensimmäisessä summassa k ja yhdistetään molemmista summista samanlaiset termit, saadaan

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}.$$

Tehtävän 18 perusteella summassa oleva sulkulauseke on $\binom{n+1}{k}$. Näin ollen todellakin

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k},$$

ja todistuksen viimeistelevä induktioaskel on otettu.

20. Identiteetit voidaan perustella monin tavoin. Tässä esitetään jokaiselle induktiotodistus. Kaikki identiteetit ovat selvästi tosia pienimmällä mahdollisella n:n arvolla, joten todetaan vain induktioaskelen ottamisen mahdollisuus. Oletetaan siis itse kukin todistettavista identiteeteistä todeksi parametrin arvolla n ja osoitetaan, että silloin se on tosi myös arvolla $n+1$. Ensimmäinen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Kolmas:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)$$
$$= (n+1)^2\left(\frac{n}{2}+1\right)^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Neljäs:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Viides:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$
$$= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n}{4}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}.$$

Kuudes:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Seitsemäs:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(a+bk) = \frac{(n+1)(2a+bn)}{2} + a + (n+1)b = \frac{(n+1)(2a+bn)+2a+2(n+1)b}{2}$$
$$= \frac{(n+2)(2a)+(n+1)(n+2)b}{2} = \frac{(n+2)(2a+b(n+1))}{2}.$$

Kahdeksas:

$$\sum_{k=0}^{n+1} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1}}{1-q} + aq^{n+1} = \frac{a(1-q^{n+1}+q^{n+1}-q\cdot q^{n+1})}{1-q} = \frac{a(1-q^{n+2})}{1-q}.$$

21. Olkoon $z = x+iy$ ja $w = u+iv$. Silloin $\overline{z+w} = \overline{x+iy+u+iv} = \overline{x+u+i(y+v)} = x+y-i(y+v) = (x-iy)+(u-iv) = \overline{z}+\overline{w}$ ja $\overline{zw} = \overline{xu-yv+i(xv+uy)} = xu-yv-i(xv+uy) = xu-(-y)(-v)+i(x(-v)+u(-y)) = (x-iy)(u-iv) = \overline{z}\cdot\overline{w}$. Viimeinen väite seuraa siitä, että reaaliluvulle a pätee $\overline{a} = a$.

22. $\mathrm{Re}z = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\mathrm{Im}z = \dfrac{1}{2}(z-\overline{z})$.

23. Jos $z = x+iy$, niin $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$. Siis $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = z\overline{z}\cdot w\overline{w} = |z|^2|w|^2$. Yhtälö $|z^n| = |z|^n$ todistetaan positiivisen kokonaisluvun n tapauksessa induktiolla nojautuen edelliseen tulon itseisarvoa koskevaan tulokseen; negatiivisiin kokonaislukueksponentteihin päästään heti, koska yhtälöstä $|1| = \left|z\cdot\dfrac{1}{z}\right| = |z|\left|\dfrac{1}{z}\right|$ seuraa $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. Kolmioepäyhtälön todistamiseksi todetaan, että $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2+|w|^2+z\overline{w}+\overline{z}w = |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})$. Nyt kompleksiluvun itseisarvo on määritelmänsä perusteella aina ainakin yhtä suuri kuin luvun reaaliosa. Siis $2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \le 2|z\overline{w}| = 2|z||\overline{w}| = 2|z||w|$. Mutta tämä merkitsee, että $|z+w|^2 \le |z|^2+2|z||w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2$, ja väite on todistettu.

24. Kaavat perustuvat siihen, että kompleksinen eksponenttifunktio käyttäytyy kertolaskussa samoin kuin reaalinenkin: kahden eksponenttifunktion arvo saadaan eksponenttifunktiona, jonka eksponentti on tulon tekijöiden eksponenttien summa. Tämä puolestaan perustuu trigonometrian yhteenlaskukaavoihin: $e^{i\phi} \cdot e^{i\psi} = (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi) = \cos(\phi+\psi) + \sin(\phi+\psi) = e^{i(\phi+\psi)}$.

25. Jos $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$, $q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots$, ja jos $n > m$, niin $p(x)+q(x) = a_nx^n+\cdots$; jos $n = m$, $p(x)+q(x) = (a_n+b_m)x^n+\cdots$, ja $a_n + b_m$ voi olla $= 0$. Tällöin $deg(p+q) < \max(\deg(p), \deg(q))$. $p(x)q(x) = a_nb_mx^{m+n} + \cdots$ ja $a_nb_m \neq 0$, siis $deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$.

26. Väite on välitön seuraus numeron 21 kolmannesta osasta.

27. Neliöksi täydentämisessä matkitaan binomin neliötä $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$. Siis $x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$. Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut ovat samat kuin yhtälön $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Kun tässä merkitään $2k = \frac{b}{a}$ ja käytetään edellä johdettua relaatiota, saadaan ratkaistavaksi yhtälöksi

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c = 0.$$

Kun vasemman puolen kaksi viimeistä termiä siirretään yhtälön oikealle puolelle ja otetaan yhtälön molemmista puolista neliöjuuri, saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.

29. a) Jakoyhtälön perusteella $u(x) = (x - a)q(x) + r(x)$, ja polynomin r aste on alempi kuin polynomin $x - a$. Siis $r(x)$ on nollatta astetta eli vakio. Mutta $r(a) = u(a) - (a - a)q(a) = 0$. Siis $u(x) = (x - a)q(x)$. b) Jos $u(a) = 0$ ja $u(b) = 0$, $a \neq b$, niin $u(x) = (x - a)q(x)$ ja $0 = u(b) = (b-a)q(b)$. Siis $q(b) = 0$, joten $q(x) = (x-b)q_1(x)$ ja $u(x) = (x-a)(x-b)q_1(x)$. Jatkamalla tätä nähdään, että jos u:lla on eri nollakohdat $x_1, x_2, \ldots, x_k$, niin u on jaollinen k-asteisella polynomilla $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$. Jos $k > n$, u olisi jaollinen polynomilla, jonka aste olisi korkeampi kuin q:n. Numeron 25 mukaan tämä ei ole mahdollista. c) Elleivät polynomit olisi samat, niiden erotus olisi enintään n:nnen asteen polynomi, mutta se tulisi saamaan arvon 0 aina, kun polynomien arvot ovat samat. Edellisen kohdan mukaan tämä ei ole mahdollista. d) Elleivät polynomien kertoimet olisi samat, niiden erotus ei olisi nollapolynomi, mutta se saisi arvon nolla kaikilla reaaliluvuilla. c)-kohdan mukaan tämä on mahdotonta.

30. Tulkitaan $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ a:n polynomiksi $u(a)$. Nyt $u(-(b + c)) = -(b + c)^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)bc = -(b + c)^3 + (b + c)^3 = 0$. Siis $u(a) = (a - (-(b+c))q(a) = (a + b + c)q(a)$. Kun osamäärä $q(a) = u(a) : (a + b + c)$ lasketaan jakokulmassa, saadaan $q(a) = a^2 - (b + c)a + (b + c)^2 - 3bc = a^2 + b^2 + c^2 - ba - ca - bc$.

31. Olkoon $v(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $u(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$, missä kaikki a:t ja b:t ovat kokonaislukuja. Voidaan olettaa, että $n \geq m$. Jos nyt $q(x) = c_{n-m}x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{x-m-1} + \cdots + c_1x + c_0$, niin $v(x) = q(x)u(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{x-m-1} + \cdots + c_1x + c_0)(x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0) = c_{n-m}x^n + (c_{n-m}b_{m-1} + c_{n-m-1})x^{n-1} + (c_{n-m}b_{m-2} + c_{n-m-1}b_{m-1} + c_{n-m-2})x^{n-2} + \cdots$. Kun verrataan v:n ja qu:n samanasteisten x:n potenssien kertoimia, saadaan $c_{n-m} = a_n =$ kokonaisluku, $c_{n-m-1} = a_{n-1} - c_{n-m}b_{m-1} =$ kokonaisluku jne.

32. Ratkaisu Eulerin kaavan perusteella: $z = re^{i\phi}$ $(r \geq 0)$, $z^3 = r^3e^{3\phi i}$, $1 = e^{2n\pi i}$. Oltava $r^3 = 1$, $3\phi = 2n\pi$. Eri ratkaisut saadaan, kun $n = 0, 1, 2$; ne ovat $z_1 = 1$, $z_2 = e^{(2/3)\pi i} = \cos 120° + i \sin 120° = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ja $z_3 = e^{(4/3)\pi i} = \cos 240° + i \sin 240° = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Algebrallinen ratkaisu: $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) = 0$, kun $z = 1$ tai kun $z^2 + z + 1 = 0$. Jälkimmäisen yhtälön ratkaisut saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta, ja ne ovat tietysti edellä saadut z_2 ja z_3. Jälkimmäinen yhtälö on Eulerin kaavan mukaan $r^3e^{3\phi i} = 8e^{(\pi+2n\pi)i}$, josta $r = 2$ ja $\phi = \dfrac{\pi}{3}$, π, $\dfrac{5\pi}{3}$. Siis $z_1 = 2(\cos 60° + i \sin 60°) = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$. – Alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitävä yhtälö on $\left(-\frac{z}{2}\right)^3 = 1$, joka palautuu tehtävän ensimmäiseksi yhtälöksi, kun sijoitetaan $w = -\dfrac{z}{2}$. t

33. Koska $x^3 + ax^2 + bx + x = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3$, niin todellakin (numeron 29 d-kohdan mukaan) $a = -r_1 - r_2 - r_3$, $b = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$ ja $c = -r_1r_2r_3$.

35. Olkoon x luku, joka toteuttaa molemmat yhtälöt. Selvästi $x \neq 0$. Ratkaistaan molemmista yhtälöistä b:

$$b = \frac{-8891 - 1988x^2}{x} = \frac{-1988 - 8891x^2}{x}.$$

Siis $x^2 = 1$ ja joko $x = 1$ tai $x = -1$. Edellistä x:n arvoa vastaa $b = -10879$, jälkimmäistä $b = 10879$.

36. Yhtälöiden vasemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälöryhmällä voi olla vain ei-negatiivisia ratkaisuja. Jos toinen yhtälö vähennetään ensimmäisestä, saadaan $x^2-z^2 = -6(x-z)$ eli $(x-z)(x+z+6) = 0$. Koska $x+z+6 > 0$, on oltava $x = z$. Kun kolmas yhtälö vähennetään toisesta, saadaan samoin, että $x = y$. Kaikissa yhtälöryhmän ratkaisuissa on siis $x = y = z$, joten riittää, kun ratkaistaan yhtälö $2x^2 = 6x$; sen ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = 3$. Yhtälöryhmän ratkaisut ovat siis $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ja $(x, y, z) = (3, 3, 3)$.

37. Muodostetaan polynomi $q(x) = p(x) - x$. q on kuudennen asteen polynomi, jolla on kuusi eri nollakohtaa $1, 2 \ldots, 6$. Siis $q(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-6)$, $q(7) = 6! = 720$ ja $p(7) = q(7) + 7 = 727$.

38. Vietan kaavojen perusteella $x_1+x_2 = a+d$ ja $x_1x_2 = ad-bc$. Siis $x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) = (a+d)^3-3(ad-bc)(a+d) = a^3+d^3+3abc+3bcd$ ja $x_1^3x_2^3 = (ad-bc)^3$. Siis $(y-x_1^3)(y-x_2^3) = y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3$, ja väite on todistettu.

39. Olkoot a, b, c, d polynomin $x^4 + x^3 - 1$ nollakohdat. Merkitään vielä $ab = p$, $cd = q$, $a + b = r$ ja $c + d = s$. Nyt Vietan kaavat voidaan kirjoittaa yhtälöinä, joissa tuntemattomia ovat viimeksi nimetyt neljä suuretta:

$$\begin{gathered} a + b + c + d = r + s = -1 \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = p + rs + q = 0 \\ abc + abd + acd + bcd = ps + rq = 0 \\ abcd = pq = -1. \end{gathered}$$

Koska on kysymys yhtälöstä, jonka toteuttaa $ab = p$, eliminoidaan edellisistä yhtälöistä q, r ja s. Kun ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan s ja viimeisestä q, ja nämä sijoitetaan kahteen keskimmäiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{gathered} p - r(r+1) - \frac{1}{p} = 0, \\ -p(r+1) - \frac{r}{p} = 0. \end{gathered}$$

Kun jälkimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan

$$r = -\frac{p^2}{p^2 + 1}$$

ja sijoitetaan edelliseen yhtälöön, saadaan $p^6 + p^4 - p^2 - 1 + p^3 = 0$, eli juuri se yhtälö, jonka luvun $p = ab$ pitikin toteuttaa.

42. Koska $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$, niin

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\sqrt{xy} \le \sqrt{xy}.$$

51. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia lukuja ja olkoon $y_i = \ln x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon $f(x) = e^x$. Koska $f''(x) = e^x > 0$, f on konveksi. Valitaan numeron 50 kaavassa (1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$. Numeron 50 perusteella

$$e^{\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)} \le \frac{1}{n}(e^{y_1} + e^{y_2} + \cdots + e^{y_n}).$$

Mutta tämän epäyhtälön vasen puoli on

$$\left(e^{y_1+y_2+\cdots+y_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{y_1}e^{y_2}\cdots e^{y_n}\right).$$

Koska $e^{\ln y_i} = x_i$, saadaan heti aritmeettis–geometrinen epäyhtälö.

52. Jos $r > 1$, niin potenssifunktio $x \mapsto x^r$ on konveksi positiivisten reaalilukujen joukossa. Jos y_k:t ovat positiivisia ja painojen p_k summa on 1, Jensenin epäyhtälöstä seuraa heti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k y_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} p_k y_k^r.$$

Tehtävän epäyhtälö seuraa tästä heti, kun asetetaan $y_k = x_k^s$ ja $r = \frac{t}{s}$.

53. Kun harmonis–geometrinen ja aritmeettis–geometrinen epäyhtälö yhdistetään, saadaan kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y voimassa oleva epäyhtälö

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Sovelletaan tätä tehtävässä annettuun lausekkeeseen kolmesti peräkkäin:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

54. Merkitään $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$. Todistettavaksi epäyhtälöksi tulee $\sqrt{xy} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$. Tämä on yhtäpitävä epäyhtälön $xy \geq x - 1 + y - 1 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)}$ ja edelleen epäyhtälön $(x-1)(y-1) \geq 2\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1$ kanssa. Merkitsemällä $t = \sqrt{(x-1)(y-1)}$ huomataan, että epäyhtälö on yhtäpitävä toden epäyhtälön $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \geq 0$ kanssa.

55. a) Koska x ja y ovat ei-negatiivisia, tehtävän lauseke saa varmasti suurimman arvonsa, kun $x - y \geq 0$. Koska $x \geq 1$, niin tällöin $x^2y - yx^2 = xy(x-y) \leq y(1-y)$. Mutta $\sqrt{y(1-y)} \leq \frac{1}{2}(y + (1-y)) = \frac{1}{2}$. Tehtävän lauseke on siis aina $\leq \frac{1}{4}$. Koska se on tasan $\frac{1}{4}$, kun $x = 1$ ja $y = \frac{1}{2}$, lausekkeen maksimiarvo on $\frac{1}{4}$. b) Nyt $x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y = x^2y + y^2z + z^2x + xyz - x^2z - y^2x - z^2y - xyz = (x-y)(y-z)(x-z)$. Lauseke on ei-negatiivinen, jos tulon kaikki tekijät ovat ei-negatiivisia tai tasan yksi on ei-negatiivinen. Jos kaikki tekijät ovat ei-negatiivisia, tulo on aina $\leq (x-y)xy$. a-kohdan perusteella tämä lauseke on enintään $\frac{1}{4}$. Jos tekijöistä kaksi, esimerkiksi $x - y$ ja $y - z$ ovat negatiivisia, tulo on sama kuin $(y-x)(z-y)(z-x)$. Tämä tulo on $\leq yz(z-y)$ ja samoin kuin edellä $\leq \frac{1}{4}$. Lauseke saa arvon $\frac{1}{4}$, kun luvuista x, y, z yksi on 0, toinen 1 ja kolmas $\frac{1}{2}$.

56. Suoritetaan toiseen potenssiin korotukset. Koska $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, todistettavaksi epäyhtälöksi jää

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i x_i.$$

Mutta tämä epäyhtälö on juuri suuruusjärjestysepäyhtälö, numero 47, ja siis tosi.

57. Käytetään aritmeettis–geometrista yhtälöä useamman kerran. Koska

$$\frac{2a^3+b^3}{3}=\frac{a^3+a^3+b^3}{3}\ge\sqrt[3]{a^3a^3b^3}=a^2b,$$

saadaan $2a^3+b^3\ge 3a^2b$ ja vastaavasti $2b^3+c^3\ge 3b^2c$, $2c^3+a^3\ge 3c^2a$. Kun kolme edellistä epäyhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan $a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a$. (Sama epäyhtälö saadaan myös suuruusjärjestysepäyhtälöstä, numero 47.) Samalla tavalla johdetaan epäyhtälö $2a^2b+b^2c=a^2b+a^2b+b^2c\ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c}=3ab\sqrt[3]{abc}\ge 3ab$ (viimeinen epäyhtälöistä perustuu tehtävän ehtoon $abc\ge 1$). Samoin $2b^2c+c^2a\ge 3bc$ ja $2c^2a+a^2b\ge 3ca$. Kun viimeiset epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen ja jaetaan kolmella, saadaan tehtävän epäyhtälö.

60. Sijoitetaan tehtävän yhtälöön $x=0$, $y=1$. Saadaan $f(-f(1))=0$. Sijoitetaan yhtälöön seuraavaksi $y=-f(1)$. Saadaan $f(x)=1+f(1)-x$. Merkitään lyhyyden vuoksi $1+f(1)=a$, Silloin $1-x-y=f(x-f(y))=a-x+f(y)=a-x+a-y=2a-x-y$. Siis $a=\dfrac{1}{2}$, ja tehtävän ainoa mahdollinen ratkaisu on $f(x)=\dfrac{1}{2}-x$. Kun tämä funktio sijoitetaan tehtävän yhtälöön, nähdään, että se todella on ratkaisu.

61. Kun ehtoon (ii) sijoitetaan $x=y$, saadaan $2f(x)=1+f(2x)$. Merkitään $2x=u$. Silloin (i)-ehdon perusteella

$$\frac{1}{u}(1+f(u))=\frac{2}{u}f\left(\frac{u}{2}\right)=f\left(\frac{2}{u}\right)=2f\left(\frac{1}{u}\right)-1=\frac{2}{u}f(u)-1.$$

Nyt voidaan ratkaista $f(u)=1+u$. Ainoa mahdollinen ehdon täyttävä funktio on siis $f(x)=1+x$. Se myös toteuttaa molemmat ehdot (i) ja (ii).

62. Havaitaan, että $f(0,\,0)=f(2\cdot 0,\,2\cdot 0)=2^kf(0,\,0)$. Koska $k>0$, on oltava $2^k\ne 1$ ja $f(0,\,0)=0$. Jos $0<x\le y$, niin $f(x,\,y)=y^kf\left(\dfrac{x}{y},\,1\right)=xy^{k-1}$. Vastaavasti, jos $0<y\le x$, $f(x,\,y)=x^{k-1}y$. Olkoon nyt $0<x<y<z\le 1$ ja olkoon x niin pieni, että $yxy^{k-1}<z$ ja $x<z^{k-1}y$. Nyt $xy^{k-1}z^{k-1}=f\left(xy^{k-1},\,z\right)=f(f(x,\,y),\,z)=f(x,\,f(y,\,z))=f(x,\,yz^{k-1})=x\left(yz^{k-1}\right)^{k-1}$. Yhtälö on voimassa kaikilla z vain, jos z:n eksponentti yhtälön molemmilla puolilla on sama. On siis $k-1=(k-1)^2$. Vain k:n arvot 1 ja 2 ovat mahdollisia. Jos $k=1$, $f(x,\,y)=x$, kun $x\le y$ ja $f(x,\,y)=y$, kun $y\le x$. Jos taas $k=2$, $f(x,\,y)=xy$. Rutiinitarkastelu osoittaa, että molemmat funktiot toteuttavat tehtävän ehdon.

63. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x=1$, nähdään, että

$$y=\frac{f(1)}{f(f(y))}.$$

Jos $f(y_1) = f(y_2)$, niin $y_1 = y_2$, eli f on injektio. Sijoittamalla edelleen $y = 1$ saadaan $f(f(1)) = f(1)$, joten injektiivisyyden perusteella $f(1) = 1$. Siis

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \tag{1}$$

kaikilla y. Tästä ja tehtävän yhtälöstä seuraa $f(1/y) = 1/f(y)$. Kun alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $y = f(1/t)$, saadaan

$$f(xt) = f(x)f(t). \tag{2}$$

Heti nähdään, että ehdot (1) ja (2) toteuttava funktio f toteuttaa tehtävän yhtälön.

Ehdon (2) toteuttava funktio voidaan määritellä mielivaltaisesti alkuluvuille p_i ja laajentaa se positiivisten kokonaislukujen joukkoon kaavalla

$$f(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}) = f(p_1)^{n_1} f(p_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot f(p_k)^{n_k}. \tag{3}$$

(n_i:t kokonaislukuja). (2):n perusteella funktio voidaan edelleen jatkaa positiivisten rationaalilukujen joukkoon asettamalla

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}.$$

Tällainen funktio toteuttaa ehdon (1) jos ja vain jos se toteuttaa ehdon (1) kaikilla alkuluvuilla. Olkoon p_j j:s alkuluku. Määritellään $f(p_{2j}) = p_{2j-1}$ ja $f(p_{2j-1}) = 1/p_{2j}$. Suora lasku osoittaa, että $f(f(p)) = 1/p$ kaikilla alkuluvuilla. Tehtävän ehdot toteuttava funktio saadaan, kun tämä funktio laajennetaan positiivisten rationaalilukujen joukkoon kaavoilla (3) ja (2).

66. Lasketaan yhteen joukon A 0-, 1-, 2-, ..., n-alkioisten osajoukkojen lukumäärät; tulokseksi saadaan A:n kaikkien osajoukkojen lukumäärä 2^n.

67. Olkoot A ja B erillisiä joukkoja, A:ssa m alkiota ja B:ssä n alkiota. Joukossa C on $m + n$ alkiota ja sen p-alkioiset osajoukot muodostuvat joukoista, joissa on k alkiota A:sta ja $p - k$ alkiota B:stä, $k = 0, 1, 2, \ldots, p$.

69. Olkoon s suurimman sellaisen joukon koko, joka ei sisällä yhtään muodostetuista kolmen oppilaan ryhmistä. Tehdään vastaoletus $s \leq 9$ ja olkoon X s-alkioinen joukko, joka ei sisällä yhtään ryhmistä. Olkoon a oppilas, joka ei kuulu joukkoon X. Jos a ei kuulu mihinkään ryhmään, joukkoa X voitaisiin suurentaa liittämällä a siihen. Siis a kuuluu johonkin ryhmään $\{a, b, c\}$. Nyt $\{b, c\} \subset X$, koska muuten X:ää voitaisiin suurentaa. Joukolla X on

$$\binom{s}{2} \leq \binom{9}{2} = 36$$

kaksialkioista osajoukkoa. Koska $s \leq 9$, X:n ulkopuolella on ainakin $46 - 9 = 37$ oppilasta. Näistä ainakin jonkin olisi jäätävä kaikkien ryhmien ulkopuolelle. Tullaan ristiriitaan, joka osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

70. Olkoon $n_{k,m}$ erilaisten tapojen määrä muodostaa m joukkuetta k:sta jäsenestä ($m \le k$). Tehtävässä kysytään lukuja $n_{7,4}$ ja $n_{8,4}$. On selvää, että $n_{k,1} = 1$ ja $n_{k,k} = 1$ kaikilla k. Tarkastellaan tilannetta, joissa jäseniä on k ja joukkueita m, ja yhtä mahdollista joukkueen jäsentä, olkoon hän vaikka kääpiö *Ujo*. Sellaisia joukkueisiin jakoja, joissa Ujo muodostaa yksinään yhden joukkueen, on $n_{k-1,m-1}$ ja sellaisia, joissa Ujo kuuluu johonkin joukkueeseen, jossa on ainakin kaksi jäsentä, on $m \cdot n_{k-1,m}$, sillä joukkueita ilman Ujoa on $n_{k-1,m}$ kappaletta ja Ujolla on m vaihtoehtoa valita joukkue. Siis $n_{k,m} = n_{k-1,m-1} + mn_{k-1,m}$. Käytetään nyt tätä palautuskaavaa toistuvasti. Saadaan $n_{2,2} = 1$, $n_{3,2} = 1+2\cdot 1 = 3$, $n_{4,2} = 1+2\cdot 3 = 7$, $n_{5,2} = 1+2\cdot 7 = 15$, $n_{6,2} = 1+2\cdot 15 = 31$, $n_{7,2} = 1+2\cdot 31 = 63$, $n_{3,3} = 1$, $n4, 3 = 3+3\cdot 1 = 6$, $n_{5,3} = 7+3\cdot 6 = 25$, $n_{6,3} = 15+3\cdot 25 = 90$, $n_{7,3} = 31+3\cdot 90 = 301$, $n_{4,4} = 1$, $n_{5,4} = 6+4\cdot 1 = 10$, $n_{6,4} = 25+4\cdot 10 = 65$ ja $n_{7,4} = 90+4\cdot 65 = 350$. Näin monta joukkuetta saadaan kääpiöistä ilman Lumikkia. Kun Lumikki tulee mukaan, lukumääräksi saadaan $n_{8,4} = 301+4\cdot 350 = 1701$.

71. Joukkoja $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k$ on 2^k kappaletta ja jokaiset kaksi ovat erillisiä (toisessa on jokin A_i ja toisessa $S \setminus A_i$).

72. Olkoon joukko $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sen alkioiden geometrinen keskiarvo on $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$. Joukolla A on $2^n - 1$ epätyhjää osajoukkoa. Tarkastellaan yhtä A:n alkiota a_j. Se on mukana $\binom{n-1}{k-1}$ A:n k-alkioisessa osajoukossa. Jokaisen tällaisen joukon alkioiden geometrisen keskiarvon tulomuotoisessa lausekkeessa a_j:n eksponentti on $\dfrac{1}{k}$. Osajoukkojen geometristen keskiarvojen geometrisessa keskiarvossa a_j:n eksponentti on

$$\frac{1}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{k}.$$

Mutta

$$\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!k} = \binom{n}{k}\frac{1}{n}.$$

a_j:n eksponentti onkin

$$\frac{1}{(2^n-1)n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{n},$$

koska

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

76. Kirjoitetaan luvut taulukoksi

1	5	9	...	1993	1997
2	6	10	...	1994	
3	7	11	...	1995	
4	8	12	...	1996	

1001:stä luvusta 251 on jollain rivillä. Riveillä on 499 tai 500 lukua, joten peräkkäisten lukujen pareja on enintään 250. Kahden valitun luvun on satuttava samaan pariin; tällaisten erotus on 4.

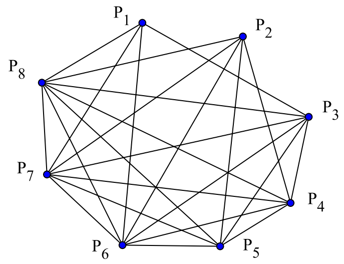
77. Numeroidaan istumapaikat 1:stä 50:een. Joko paritonnumeroisilla tai parillisnumeroisilla paikoilla istuu ainakin 13 tyttöä. Voidaan olettaa, että nämä paikat ovat paritonnumeroisia. Jos ne numeroidaan uudestaan 1:stä 25:een, on joillakin kahdella peräkkäisellä paikalla oltava molemmilla tyttö (peräkkäisiä ovat myös 1 ja 25). Näiden paritonnumeroisten paikkojen välissä olevalla parillisnumeroisella paikalla istuvalla on tyttö kummallakin puolellaan.

78. Väite pätee jo pienemmässäkin, 3×7-ruudukossa. Jokaisessa kolmen ruudun sarakkeessa on enemmän valkoisia tai enemmän mustia ruutuja. Kutsumme edellisiä sarakkeita *valkeiksi* ja jälkimmäisiä *mustiksi*. Seitsemän sarakkeen joukossa on ainakin neljä jompaakumpaa lajia, sanokaamme valkeita. Näissä sarakkeissa on kussakin enintään yksi musta ruutu. Musta ruutu voi olla kolmessa asemassa, ylimpänä, keskimmäisenä tai alimpana. Jos joka sarakkeessa on musta ruutu, se on kahdessa sarakkeessa samassa asemassa. Näissä sarakkeissa myös valkoiset ruudut ovat samassa asemassa ja kelpaavat siis suorakaiteen kärjiksi. Jos sarakkeiden joukossa on pelkistä valkoisista ruuduista muodostuvia, suorakaiteita löytyy helposti useampiakin.

79. Laatikossa, jossa on eniten palloja, on enintään 19 palloa enemmän kuin laatikossa, jossa on vähiten palloja. Koska $6 \cdot 16 = 95 + 1$, voidaan 6 palloa sijoittaa laatikoihin 16 kertaa niin, että kaikkiin laatikkoihin tulee yksi pallo ja yhteen lisäksi toinen. Tällainen kierros on toistettava enintään $94 \cdot 19$ kertaa, jotta "kaikki kuopat saataisiin täytetyiksi".

84. Maassa voi selvästi olla neljä kaupunkia: A:n ja B:n välillä kulkee juna, C:n ja D:n lentokone ja muiden väliä bussi. Osoitetaan, että viisi kaupunkia ei ole mahdollista. Osoitetaan ensin, että mikään kaupunki ei liity kolmeen muuhun samalla välineellä. Jos nimittäin esimerkiksi A liittyisi B:hen, C:hen ja D:hen junalla, B:n, C:n ja D:n väliset yhteydet ovat bussi ja lentokone. Kaikki nämä yhteydet eivät saa olla samaan kulkutapaan perustuvia. Mutta silloin jokin kaupungeista B, C, D, esimerkiksi B, liittyisi A:han junalla ja toiseen C:stä ja D:stä lentokoneella ja toiseen bussilla. Tämä ei ole sallittua. Kaupunki A voi näin ollen liittyä enintään neljään muuhun kaupunkiin (kaksi kulkutapaa ja kaksi kaupunkia/kulkutapa), eli kaupunkeja on enintään viisi. Osoitetaan vielä, että kaupunkeja ei voi olla viittä. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan kaupunkeja on viisi; A liittyy B:hen ja C:hen tavalla T_1 ja D:hen ja E:hen tavalla T_2. Nyt C liittyy kahteen kaupunkiin tavalla T_1; toinen näistä on A; voidaan olettaa, että toinen on D. Siten B ja C liittyvät tavalla T_2. Nyt D ei voi liittyä E:hen tavalla T_3 eikä myöskään tavalla T_2. Näin ollen D liittyy E:hen tavalla T_1 ja C E:hen tavalla T_2. Mutta näin jokaisen kaupungin liittymismuodot ovat T_1 ja T_2; muotoa T_3 ei käytetä ollenkaan. Tämä on vastoin oletusta. Vastaoletus on siis väärä.

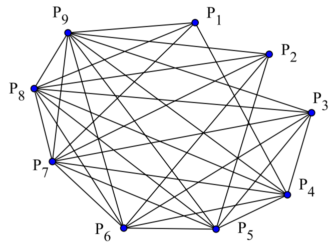
85. Osoitetaan, että mahdolliset arvot ovat vain $n = 8$ ja $n = 9$. Oheiset verkot osoittavat eräät mahdollisuudet, kun $n = 8$ ja $n = 9$. On vielä osoitettava, että vieraiden lukumäärät $n \geq 10$ eivät ole mahdollisia. Olkoon siis $n \geq 10$. Jos tehtävässä kuvailtu järjestely toteutuisi, P_1:llä olisi neljä tuttavaa ja P_2:lla viisi, ja P_n, P_{n-1} ja P_{n-2} tuntisivat kaikki muut. Siten P_1:llä on yksi ja P_2:lla kaksi tuttavaa joukon $T = \{P_{n-2}, P_{n-1}, P_n\}$ ulkopuolella. Tarkastellaan sitten joukkoa $S = \{P_{n-5},$



86. Valitaan $n_0 = 9$ ja $m_0 > 4 \cdot 2^9$. Nyt tytöistä voidaan muodostaa 2^9 eri osajoukkoa. Koska poikia on niin paljon kuin on, jotkin 5 poikaa tuntevat tasan saman joukon tyttöjä. Jos tässä joukossa on ainakin 5 tyttöä, kysytyt joukot löytyvät. Jos joukossa on enintään 4 tyttöä, joukon komplementin tytöt ovat tuntemattomia näille viidelle pojalle.

87. Todistetaan väite induktiolla daamien lukumäärän n suhteen. On oltava $n \geq 2$, koska muutoin olisi herra, joka on tanssinut kaikkien daamien kanssa. Jos $n = 2$, on herra H_1, joka on tanssinut daamin D_1 kanssa. Koska D_1 ei ole tanssinut kaikkien herrojen kanssa, on herra H_2, joka ei ole tanssinut D_1:n kanssa. Koska H_2 on tanssinut jonkin daamin kanssa, H_2 on tanssinut D_2:n kanssa. $\{D_1, D_2\}$, $\{H_1, H_2\}$ kelpaavat tehtävässä vaadituiksi pareiksi. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun daameja on n kappaletta. Oletetaan, että tanssiaisissa on $n + 1$ daamia. Katsotaan eri mahdollisuuksia. Voi olla, että kaikki herrat ovat tanssineet ainakin kahden, mutta enintään $(n - 1)$:n daamin kanssa. Jos otetaan mitkä hyvänsä n daamia, niin kaikki herrat ovat tanssineet näistä ainakin yhden mutta ei kaikkien kanssa. Induktio-oletus takaa, että tehtävän mukaiset parit löytyvät. Oletetaan sitten, että jokin herra, H, on tanssinut n:n daamin kanssa. On yksi daami D', jonka kanssa hän ei ole tanssinut. D' on kuitenkin tanssinut ainakin yhden herran, H':n, kanssa. H' ei ole tanssinut kaikkien daamien kanssa, joten on daami D, jonka kanssa hän ei ole tanssinut. Mutta H on tanssinut D:n kanssa, joten $\{D, D'\}$ ja $\{H, H'\}$ ovat halutut parit. On vielä jäljellä mahdollisuus, että jokin herra H on tanssinut vain yhden daamin D kanssa. Koska D ei ole tanssinut kaikkien herrojen kanssa, on olemassa herra H', joka ei ole tanssinut D:n kanssa. H' on kuitenkin tanssinut jonkin daamin D' kanssa. $\{D, D'\}$, $\{H, H'\}$ ovat nytkin halutunlaiset parit.

P_{n-4}, $P_{n-3}\}$. Tähän joukkoon kuuluvilla on vain yksi tuntematon muiden vieraiden joukossa. Kukin heistä tuntee ainakin toisen vieraista P_1 ja P_2. Koska P_1:n voi tuntea enintään yksi ja P_2:n enintään kaksi S:n jäsentä, tilanne on se, että P_1:n tuntee yksi ja P_2:n kaksi S:ään kuuluvaa vierasta. Vieraiden P_1 ja P_2 kaikki tuttavat kuuluvat joukkoon $T \cup S$. Koska $n \geq 10$, vieras P_{n-6} tuntee kahta lukuun ottamatta kaikki vieraat. Nämä kaksi ovat välttämättä P_1 ja P_2. Siis P_{n-6} tuntee vieraan P_3. Mutta nyt vieras P_3 tuntee vieraat $P_{n-6}, \ldots, P_n$, kaikkiaan seitsemän. Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, jonka mukaan P_3:lla on tasan kuusi tuttavaa.



90. Jos pelaajalla on edessään 3, 2 tai 1 merkkiä, hän voittaa. Jos vastustajalla on edessään 4 pelimerkkiä, niin hänen siirtonsa jälkeen laudalla on 1, 2 tai 3 merkkiä jne. – Pelaaja, joka voi pakottaa vastustajansa tilanteeseen, jossa tällä on edessään neljällä jaollinen määrä merkkejä, voittaa. Koska 2012 on 4:llä jaollinen, Olli voittaa.

91. Ensimmäinen paimen keritsee joitakin lampaita toiselta puolelta. Toinen paimen ei saa keritä juuri samoja lampaita, joten kolmannen paimenen tullessa vuoroon osalla lampaista on toinen puoli kerittynä, ja nämä lampaat eivät ole juuri ne lampaat, jotka toinen tai toinen edeltävistä paimenista keritsi. Kolmas paimen voi siis keritä kaikki ne lampaat, joiden toinen puoli jo on keritty. Sama sykli jatkuu, jos kerimättömiä lampaita vielä on. Kolmannen paimenen ei siis tarvitse lähteä viemään laumaa laaksoon.

92. Jos piirissä olevien lasten määrä olisi 3^n, niin silloin, kun ensimmäisen numeron sanoja olisi uudelleen vuorossa, määrä olisi 3^{n-1}. Tällöin ensimmäisen numeron sanoja olisi voittaja. Näin ollen se lapsi, joka ensimmäisenä saa sanoa ”yksi”, kun jäljellä olevien oppilaiden määrä on jokin 3:n potenssi, voittaa. Nyt $3^6 = 729 < 1991 < 3^7 = 2187$. Koska luku $1991 - 729 = 1262$ on parillinen, silloin, kun jäljellä on 729 oppilasta poistuneissa on yhtä monta ”kahden” ja ”kolmen” sanojaa, joten lapsi, joka pääsee ääneen, kun 1262 muuta on poistunut, sanoo ”yksi” ja voittaa. Voittajan vuoro tulee, kun $3 \cdot \dfrac{1262}{2} = 1893$ oppilasta on sanonut numeronsa. Voittaja on siis lapsi numero 1894, jos aloittajan numero on 1 ja numerointi tehdään myötäpäivään.

93. Toinen pelaaja, sanokaamme B, voittaa. Hänen pitää vain siirtää nappula ruudusta, johon ensimmäinen pelaaja A on sen siirtänyt, keskipisteen suhteen symmetriseen ruutuun. Jos nimittäin A:n siirto on johtanut ruutuun jonka (keskipisteen) etäisyys laudan keskipisteestä on d, B:n siirron pituus on $2d$. Nappula on nyt ruudussa, jonka keskipisteen P etäisyys laudan keskipisteestä on edelleen d. A:n siirron on tapahduttava ruutuun, jonka keskipiste on P-keskisen $2d$-säteisen ympyrän ulkopuolella. Jos pisteen, johon A siirtää, etäisyys keskipisteestä on d_1, niin A:n siirron pituus on $\leq d+d_1$. Koska siirron pituus on $> 2d$, $d_1 > d$ ja $2d_1 > d+d_1$. B:n seuraava siirto on siten A:n siirtoa pitempi; se on muutenkin mahdollinen, koska lauta on keskipisteensä suhteen symmetrinen. Koska erilaisia siirtoja on vain äärellinen määrä, tullaan ennen pitkää tilanteesen, jossa A ei enää voi siirtää.

97. Sovelletaan Eukleideen algoritmia: $9x + 5y = 4(2x + 3y) + x - 7y$ ja $2x+3y = 2(x-7y)+17y$. Jos $y \neq 0$, luku $17y$ on tekijänä luvuissa $9x+5y$ ja $2x + 3y$ ja siten myös luku 17. Tehtävän väite ei pidä paikkansa tapauksessa $y = 0$: 0 on jaollinen 17:llä, mutta $2x$ ja $9x$ eivät ole, jos $17 \not| x$.

99. Kun yhtälöön $p(x) = 0$ sijoitetaan $x = \dfrac{s}{q}$ ja lavennetaan q^n:llä, saadaan $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}q + \cdots + a_1 s q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Nyt $s|a_0q^n$, mutta $(s,\, q) = 1$. Siis $s|a_0$. Samoin nähdään, että $q|a_n$.

106. Jos n ei ole neliöluku ja a on n:n tekijä, niin $\dfrac{n}{a} \neq a$ ja $\dfrac{n}{a}$ on myös n:n tekijä. Koska kaikki n:n tekijät voidaan tällä tavalla jakaa pareiksi, $N(n)$ on parillinen luku. Jos sen sijaan $n = k^2$ on neliöluku, n:llä on naiden pareiksi jakautuvien tekijöiden lisäksi tekijä k. Nyt $N(n)$ on pariton. Koska $44^2 = 1936 < 1989 < 2025 = 45^2$, lukujen $1,\, 2,\, \ldots,\, 1989$ joukossa on 44 neliölukua. Tehtävässä kysytyssä summassa on siis parillinen määrä parittomia yhteenlaskettavia, joten summa on parillinen.

107. Etsittävien x:n ja y:n tulee olla Diofantoksen yhtälön $2xy = p(x + y)$ ratkaisuja. Koska p on alkuluku ja > 2, sen on oltava x:n tai y:n tekijä. Oletetaan, että $x = pa$ jollain kokonaisluvulla a. Silloin $2ay = pa+y$ ja $(2a-1)y = pa$. Nyt $(2a-1,\, a) = 1$, joten $a|y$. Siis $y = ab$ jollain kokonaisluvulla b ja $(2a-1)b = p$. Koska p on alkuluku, joko $2a-1 = p$ tai $b = p$. Jos $b = p$, niin $y = ap = x$. Koska $x < y$, tämä on mahdotonta. On siis oltava $b = 1$ ja $2a - 1 = p$, joten $x = \dfrac{p(p+1)}{2}$ ja $y = \dfrac{p+1}{2}$. Selvästi $x > y$. Vaihtoehto $y = pa$ olisi johtanut muuten samaan tulokseen, mutta olisi ollut $y > x$. Saatu ratkaisu on siis ainoa mahdollinen. On helppo todeta, että se myös on ratkaisu eli toteuttaa ehdon $\dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

108. Luvut eivät voi kaikki olla samoja, koska $[a,\, a,\, a] = a < a + a + a$. Voidaan olettaa, että $a \leq b \leq c$. Silloin $a+b < 2c$ ja edelleen $c < a+b+c < 3c$. Koska $a + b + c$ on c:n monikerta, on oltava $a + b + c = 2c$ ja $a + b = c$. Nyt $b|[a,\, b,\, c]$ eli $b|(2(a + b)$. Siis $b|(2a)$ ja koska $b \geq a$, on oltava joko $b = a$ tai $b = 2a$. Jos olisi $b = a$, niin olisi $c = a + b = 2a$ ja $[a,\, b,\, c] = [a,\, a,\, 2a] = 2a = a + b + c = 4a$. Ristiriita osoittaa, että on oltava $b = 2a$ ja $c = a + b = 3a$. Kolmikko a, $2a$, $3a$ ja jokainen sen permutaatio on todellakin ratkaisu, sillä $[a,\, 2a,\, 3a] = 6a = a + 2a + 3a$.

109. Osoitetaan, että sekä a että b ovat jaollisia n:llä. Tehtävän väite seuraa heti tästä. Koska $2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2)$, $n^2|(2ab)$. Olkoon p mielivaltainen n:n alkutekijä, ja olkoon α p:n eksponentti n:n alkutekijähajotelmassa. p:n eksponentti $2ab$:n alkutekijähajotelmassa on ainakin 2α ja ainakin $2\alpha - 1$ luvun ab alkutekijähajotelmassa. Ainakin toinen luvuista a ja b on jaollinen luvulla p^α. Koska $n|(a+b)$ ja siis $p^\alpha|(a+b)$, on toinenkin luvuista a, b jaollinen p^α:lla. Mutta tämä merkitsee, että molemmat luvuista a ja b ovat jaollisia n:lla.

110. Oletuksen mukaan $a = b+km$ ja $c = d+lm$. Silloin $a+c = (b+d)+(k+l)m$ ja $ac = bd+(bl+kd+klm)m$; nämä osoittavat kaksi ensimmäistä väitettä oikeiksi. Potenssia koskeva väite seuraa kertolaskua koskevasta väitteestä.

111. Olkoon $ac = bc + km$ eli $(a-b)c = km$. Koska $(a-b)c$ on jaollinen m:llä ja $(c, m) = 1$, on $a-b$ jaollinen m:llä (numero 98) eli $a \equiv b \bmod m$.

112. Luvun n kymmenjärjestelmäesitys $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ on itseasiassa lyhennysmerkintä polynomille $n = p(10) = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0$. Koska on voimassa $10 \equiv 1 \bmod 3$ ja $\bmod\ 9$, niin

$$a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 \bmod 3$$

ja $\bmod\ 9$. Tästä seuraa erityisesti, että luku on jaollinen kolmella tai yhdeksällä silloin ja vain silloin, kun sen kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on jaollinen 3:lla tai 9:llä.

Koska $10 \equiv -1 \bmod 11$, päätellään samoin, että luku n on jaollinen 11:llä jos ja vain jos luku, joka saadaan kun n:n kymmenjärjestelmäesityksen ensimmäisestä numerosta vähennetään toinen, lisätään kolmas jne., on jaollinen 11:llä.

113. Tehtävän 112 mukaan $B \equiv A \equiv 4444^{4444} \bmod 9$. Lisäksi $4444 \equiv 16 \equiv 7 \bmod 9$. Nyt $7^2 = 49 \equiv 4 \bmod 9$ ja $7^3 \equiv 28 \equiv 1 \bmod 9$. Lisäksi $4444 \equiv 16 \equiv 1 \bmod 3$. Siis $4444 = 3p+1$ ja $4444^{4444} \equiv 7^{4444} = 7 \cdot (7^3)^p \equiv 7 \bmod 9$. Luvun B numeroiden summa on siis $\equiv 7 \bmod 9$. Arvioidaan vielä luvun suuruutta. Koska $4444 < 10^4$ ja $4444 < 5000$, $4444^{4444} < 10^{4 \cdot 5000}$. Luvussa 4444^{4444} on siis alle 20000 numeroa, joten sen numeroiden summa eli A on alle $9 \cdot 20000 = 180000$. A:n numeroiden summa eli B puolestaan on alle $1 + 5 \cdot 9 = 46$, joten B:n numeroiden summa on enintään $3 + 9 = 12$. Ainoa positiivinen luku, joka on < 13 ja $\equiv 7 \bmod 9$ on 7.

114. Jos $x \equiv 0 \bmod 3$, niin $x^2 \equiv 0 \bmod 3$. Jos $x \equiv 1 \bmod 3$, niin $x^2 \equiv 1^2 = 1 \bmod 3$. Jos $x \equiv 2 \bmod 3$, niin $x^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1 \bmod 3$. Samoin, jos $x \equiv 0 \bmod 4$, niin $x^2 \equiv 0 \bmod 4$. Jos $x \equiv 1 \bmod 4$, $x^2 \equiv 1 \bmod 4$. Jos $x \equiv 2 \bmod 4$, niin $x^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 0 \bmod 4$. Viimein, jos $x \equiv 3 \bmod 4$, niin $x^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 1 \bmod 4$.

115. Tarkastellaan yhtälöä modulo 4. Osoitetaan ensin, että ratkaisussa a, b ja c ovat välttämättä parillisia. Jos nimittäin kaikki kolme olisivat parittomia, yhtälön vasen puoli olisi $\equiv 3 \bmod 4$ ja oikea $\equiv 1 \bmod 4$; jos luvuista kaksi olisi parittomia, vasen puoli olisi $\equiv 2 \bmod 4$ ja oikea puoli joko $\equiv 1 \bmod 4$ (jos a ja b ovat molemmat parittomia) tai $\equiv 0 \bmod 4$ (jos ainakin toinen luvuista a ja b on parillinen). Jos viimein tasan yksi luvuista olisi pariton, vasen puoli olisi $\equiv 1 \bmod 4$, mutta a^2b^2 olisi neljällä jaollinen. On siis oltava $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ ja $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4a_1^2b_1^2$. Tästä seuraa heti, että $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \equiv 0 \bmod 4$. Tämä ei ole mahdollista, jos yksikin luvuista a_1, b_1,

c_1 on pariton. Siis $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, $c_1 = 2c_2$ ja $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 16a_2^2b_2^2$. Samoin kuin edellä, nähdään, että $a_2 = 2a_3$, $b_2 = 2b_3$, $c_2 = 2c_3$. Prosessia voidaan jatkaa rajatta, joten tullaan lopputulokseen, jonka mukaan a, b ja c ovat jaollisia millä hyvänsä kahden potenssilla. Mutta ainoa luku, jolle tällainen on mahdollista, on 0. Siis $a = b = c = 0$ on yhtälön ainoa ratkaisu.

123. Huomataan, että

$$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{15}x = \frac{1}{5}(x^5 - x) + \frac{1}{3}(x^3 - x) + x.$$

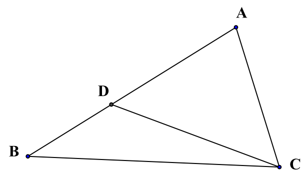
Fermat'n pienen lauseen perusteella $x^5 - x = x(x^4 - 1)$ on jaollinen viidellä ja $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ on jaollinen 3:lla, olipa x mikä kokonaisluku tahansa.

124. Tässä haetaan kongruenssiyhtälön $n^{2545} \equiv 2541 \bmod 2549$ pienintä positiivista ratkaisua. Selvästi n ei ole jaollinen 2549:llä. Hetken askartelun jälkeen huomaa, että 2549 on alkuluku. Fermat'n lauseen nojalla $n^{2548} \equiv 1 \bmod 2549$. Jos siis n on yhtälön ratkaisu, niin $2541n^3 \equiv 1 \bmod 2549$ eli $-8n^3 = (-2n)^3 \equiv 1 \bmod 2549$. Mutta $2548 = 3 \cdot 849 + 1$, joten Fermat'n pienen lauseen nojalla $1 \equiv (-2n)^{2548} = \left((-2n)^3\right)^{849}(-2n) \equiv -2n \bmod 2549$. Tästä ratkaistaan $n \equiv 1274 \bmod 2549$; $n = 1274$ on kysytty ratkaisu.

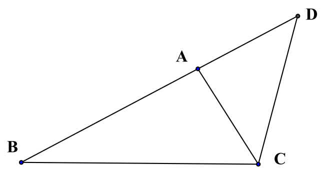
125. Olkoon $v_n \equiv u_n \bmod 1986$ ja $0 \le v_n < 1986$. Lukujonossa $v_1, v_2, \ldots$ on mahdollisia peräkkäisten lukujen pareja v_n, v_{n+1} enintään 1986^2, joten ainakin jokin pari toistuu jonossa. Jollain p ja $q > p$ on siis $v_p = v_q$ ja $v_{p+1} = v_{q+1}$. Olkoon erityisesti p pienin tällainen luku. Jos $p > 1$, niin $v_{p-1} \equiv v_p^2 - v_{p+1} \equiv v_q^2 - v_{q+1} \equiv v_{p-1}$. Tämä on ristiriidassa p:stä tehdyn minimaalisuusoletuksen kanssa. Siis $p = 1$. Koska jono (v_n) jatkuu indeksistä q eteenpäin samana kuin indeksistä 1, niin jokainen jonossa oleva peräkkäisten lukujen pari esiintyy jonossa äärettömän monta kertaa. Nyt $u_3 = u_2^2 - u_1 = 45^2 - 39 = 1986$. Jonossa on siten äärettömän monta 1986:lla jaollista lukua.

126. Katsotaan ensin tapaus $y = 0$. Yhtälö saa muodon $2^x = (z-1)(z+1)$. Peräkkäiset nollasta eroavat luvut $z - 1$ ja $z + 1$ ovat molemmat kahden potensseja. Ainoa mahdollisuus on $z = 3$. Kolmikko (3, 0, 3) on eräs ratkaisu. Olkoon sitten $y > 0$ ja x pariton, $x = 2k+1$. Nyt luku $z^2 - 2^{2k+1}$ on jaollinen kolmella. Mutta $z^2 \equiv 0$ tai $\equiv 1 \bmod 3$ ja $2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k \equiv 2 \cdot 1^k \equiv 2 \bmod 3$, joten $z^2 - 2^{2k+1} \equiv 1$ tai $\equiv 2 \bmod 3$. Parittomilla x:n arvoilla ei siis löydy ratkaisuja. Olkoon sitten x parillinen, $x = 2k$. Yhtälö voidaan kirjoittaa $3^y = (z-2^k)(z+2^k)$, joten $z-2^k$ ja $z+2^k$ ovat molemmat kolmen potensseja. Jos p on lukujen $z-2^k$ ja $z+2^k$ suurin yhteinen tekijä, z on lukujen erotuksen 2^{k+1} tekijä. Koska p on myös 3^y:n tekijä, on oltava $p = 1$. Näin ollen $z - 2^k = 1$ ja $z + 2^k = 3^y$. Näistä ratkaistaan $3^y = 2^{k+1} + 1$. Kun $k = 0$, saadaan ratkaisu (0, 1, 2). Jos taas $k > 1$, niin $2^{k+1} \equiv 0 \bmod 4$. Nyt $3 \equiv -1 \bmod 4$, joten $3^y \equiv -1 \bmod 4$, kun y on pariton ja $3^y \equiv 1 \bmod 4$, kun y on parillinen. Ratkaisuja voi olla vain, kun y on parillinen, $y = 2m$. Ratkaistavaksi yhtälöksi tulee $2^{k+1} = (3^m - 1)(3^m + 1)$. Lukujen $3^m - 1$ ja $3^m + 1$ on oltava kahden potensseja ja koska niiden erotus on 2, on oltava $3^m - 1 = 2$ eli $m = 1$, $y = 2$ ja $k + 1 = 3$, $k = 2$, $x = 4$. Saadaan kolmas ratkaisu (4, 2, 5).

131. Olkoon ABC kolmio ja $AB > AC$. Valitaan sivun AB piste D niin, että $AD = AC$. Silloin ADC on tasakylkinen kolmio, joten $\angle BCA > \angle DCA = \angle ADC > \angle ABC$. Viimeinen epäyhtälö saadaan, kun numeron 129tulosta sovelletaan kolmioon BCD. Lauseen käänteisen puolen todistus on epäsuora.



132. Valitaan kolmion ABC sivun BA jatkeelta piste D niin, että $AD = AC$, jollin $BD = AB + AD$. Kolmio ACD on tasakylkinen. Siis $\angle BDC = \angle ACD < \angle BCD$. Kun numeron 131 tulosta sovelletaan kolmioon DCB, nähdään, että $BC < BD$. Kolmioepäyhtälön toinen osa seuraa heti ensimmäisestä.



133. ”ksk”: Erotetaan puolisuoralta ED jana $ED' = BA$. Silloin kolmiot ABC ja $D'EF$ ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle EFD = \angle BCA = \angle EFD'$. Tämä on mahdollista vain, jos $D' = D$.

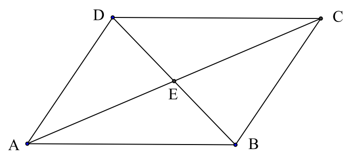
”kks”: Erotetaan puolisuoralta EF jana $EF' = BC$. Nyt kolmiot ABC ja DEF' ovat yhteneviä (sks), joten $\angle DFR = \angle ACB = \angle DF'E$. Suorat FD ja $F'D$ ovat yhdensuuntaisia. Koska ne kulkevat saman pisteen D kautta, ne ovat sama suora. Siis $F = F'$.

”sss”: Piirretään puolisuora AC' eri puolelle suoraa AB kuin piste C niin, että $\angle BAC' = \angle FDE$. Valitaan vielä C' niin, että $AC' = DF = AC$. Silloin kolmiot ABC' ja DFE ovat yhteneviä (sks). Siis $BC' = FE = BC$ ja $\angle AC'B = \angle DFE$. Nyt $AC'C$ ja BCC' ovat tasasivuisia kolmioita, joten $\angle ACC' = \angle AC'C$ ja $\angle BCC' = \angle BC'C$. Nyt pisteen C sijainnista riippuen $\angle ACB$ on joko kulmien $\angle ACC'$ ja $\angle BCC'$ summa tai erotus ja $\angle AC'B$ samoin kulmien $\angle AC'C$ ja $\angle BC'C$ summa tai erotus. Joka tapauksessa $\angle ACB = \angle AC'B = \angle DFE$, ja kolmiot ABC ja DEF ovat yhtenevät (sks).

134. Valitaan puolisuoralta EF piste F' niin, että $EF' = BC$. Nyt kolmiot ABC ja DEF' ovat yhteneviä (sks). Jos $F = F'$, kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä. Jos $F \neq F'$, niin kolmiossa DFF' on $DF' = AC = DF$, joten kolmio on tasakylkinen. Siis $\angle DFF' = \angle DF'F = \angle DF'E = \angle ACB$, ja väite on todistettu.

135. a) Oletetaan, että $ABCD$ on suunnikas. Piirretään jana BD. Suunnikkaan määritelmän mukaisista yhdensuuntaisuuksista seuraa $\angle ABD = \angle CDB$ ja $\angle ADB = \angle CBD$. Siis $ABD \cong CDB$ (ksk) ja $AB = DC$, $AD = BC$. Jos taas $ABCD$ on nelikulmio, jossa $AB = DC$ ja $AD = BC$, niin $ABD \cong CDB$ (sss), ja suunnikkaan määritelmän mukaiset yhdensuuntaisuudet seuraavat kulmayhtälöistä $\angle ABD = \angle CDB$ ja $\angle ADB = \angle CBD$.

b) Koska $AB \| DC$, $\angle ABD = \angle CDB$. Siis $ABD \cong CDB$ (sks). Siis $\angle ADB = \angle DBC$ ja $AD \| BC$. $ABCD$ on siis suunnikas. c) Olkoon E AC:n ja BD:n leikkauspiste. Koska $\angle EAB = \angle ECD$, $\angle EBA = \angle EDC$ ja $AB = CD$, kolmiot ABE ja CDE ovat yhteneviä (ksk). Siis $AE = EC$ ja $BE = ED$.



d) Jos suunnikas $ABCD$ on neljäkäs, niin $AB = BC$. Kolmiot ABE ja CBE ovat yhteneviä (sss). Siis $\angle AEB = \angle CEB$. Jos toisaalta suunnikkaassa $ABCD$ on $AC \perp BD$, niin kolmiot AEB ja CEB ovat yhteneviä (sks), joten $AB = BC$, ja $ABCD$ on neljäkäs.

137. "kk": Olkoon kolmioissa ABC ja DEF $\angle ABC = \angle DEF$ ja $\angle BCA = \angle EFD$. Kolmion kulmien summaa koskevan tuloksen perusteella on silloin $\angle CAB = \angle FDE$. Valitaan puolisuorilta BA ja BC pisteet D' ja F' niin, että $BD' = ED$ ja $BF' = EF$. Kolmiot DEF ja $D'BF'$ ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle BF'D' = \angle EFD = \angle BCA$, joten $CA \| F'D'$. Siis $BA : BC = BD' : BF' = EC : EF$. Muut sivujen pituussuhteiden yhtäsuuruudet saadaan samoin sijoittamalla kolmion DEF "kopio" kolmion ABC kahden muun kulman aukeamaan.

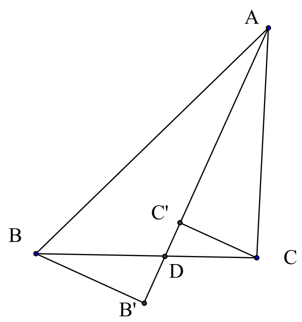
"sks": Jos $\angle ABC = \angle DEF$, sijoitetaan taas kolmion DEF kopio $D'BF'$ kulman ABC aukeamaan. Jos $AB : BC = DE : EF = D'B : BF'$, niin $D'F' \| AC$, josta seuraa $\angle BCA = \angle BF'D' = \angle EFD$. Nyt voidaan soveltaa yhdenmmuotoisuuskriteeri kk:ta.

"sss": Valitaan BA:lta ja BC:ltä pisteet D' ja F' niin, että $BD' = ED$ ja $BF' = EF$. Nyt kolmiot ABC ja $D'BF'$ ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis $D'F' : AC = BD' : AB = DE : AB = DF : AC$. Siis $D'F' = DF$, joten $D'BF'$ ja DEF ovat yhteneviä. Kolmioilla on samat kulmat, ja lopulta kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoisia (kk).

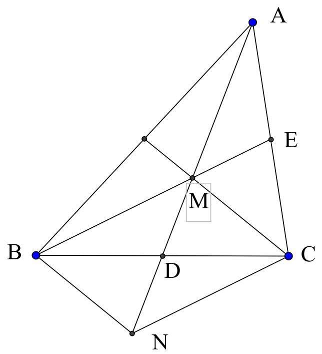
"ssk": Palautetaan samoin vastaavaan yhtenevyyskriteeriin.

138. Leikatkoon kolmion ABC kulman $\angle CAB$ puolittaja sivun BC pisteessä D. Olkoot B' ja C' pisteiden B ja C kohtisuorat projektiot suoralla AD. Kuvioon syntyy kaksi paria yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita: $BB'D \sim CC'D$ ja $BB'A \sim CC'A$. Sivupari BB', CC' on mukana molemmissa. Nyt

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC}.$$



140. Olkoot D, E ja F kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB keskipisteet ja mediaanien leikkauspiste olkoon M. Valitaan puolisuoralta AD piste N niin, että $ND = DM$. Silloin kolmiot BND ja CMD ovat yhteneviä (sks), joten $\angle DBM = \angle DCN$, $MD = DN$ ja $BM \| NC$. Koska $ME \| NC$ ja $AE = EC$, niin $AM = MN$. Siis $MD = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{2}AM$, ja väite seuraa.



142. Olkoon kolmio ABC suorakulmainen, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ ja olkoon CC' korkeusjana ja $AC' = x$, $C'B = y$. Kolmiot ABC, CBC' ja ACC' ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{y}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{ja} \quad \frac{x}{b} = \frac{b}{c}.$$

Yhtälöistä saadaan ristiin kertomalla $cy = a^2$ ja $cx = b^2$. Siis

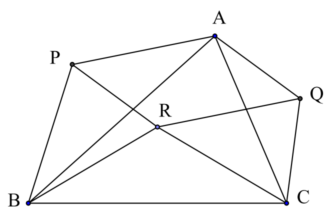
$$c^2 = (x + y)c = a^2 + b^2.$$

Oletetaan sitten, että ABC on kolmio, jossa $a^2 + b^2 = c^2$. Piirretään kolmio DEF, jossa $\angle EFD$ on suora ja $EF = a$, $DF = b$. Silloin edellisen perusteella $DE^2 = a^2 + b^2 = c^2$, $DE = c$ ja kolmiot DEF, ABC ovat yhteneviä (sss). Mutta silloin $\angle BCA = \angle EFD$, joten $\angle BCA$ on suora kulma.

143. Koska MC on sivun BC puolikas, riittää, kun osoitetaan, että $AD = \dfrac{1}{2}(AB+AC)$. Piirretään C:n kautta MD:n suuntainen suora; se leikkaa AB:n pisteessä E ja AL:n pisteessä F. Suorakulmaiset kolmiot AEF ja ACF ovat yhteneviä (ksk), joten $AE = AC$. Kolmion EBC sivun EC suuntainen suora MD puolittaa sivun BC, joten se puolittaa myös sivun BE. Mutta koska D nyt on EB:n keskipiste, AD on AE:n ja AB:n eli myös AC:n ja AB:n keskiarvo, ja väite on todistettu.

144. Koska $\angle CBR = \angle ABP$, on $\angle PBR = \angle ABC$ (yhtä suuriin lisätään sama tai yhtä suurista vähennetään sama). Tasakylkisten kolmioiden PAB ja RBC yhdenmuotoisuudesta seuraa, että

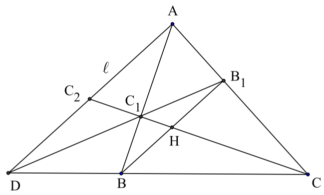
$$\frac{PB}{BR} = \frac{AB}{BC}.$$



Mutta näistä seuraa yhdenmuotoisuus $PBR \sim ABC$ (sks). Täsmälleen samoin osoitetaan, että $QRC \sim ABC$. Siis $PBR \sim QRC$. Mutta $BR = RC$.

Siis onkin jopa $PBR \cong QRC$. Siis $AB = PB = RQ$ ja $AQ = CQ = PR$. Nelikulmiossa $APRQ$ on kaksi paria yhtä pitkiä vastakkaisia sivuja, joten se on suunnikas.

145. Olkoon C_2 ℓ:n ja suoran CC_1 leikkauspiste ja D ℓ:n ja suoran BC leikkauspiste. Nyt suora B_1C_1 kulkee myös pisteen D kautta jos ja vain jos B_1D kulkee pisteen C_1 kautta. Tehtävän väitteen kanssa on siis yhtäpitävää se, että kolmion ACD ceviaanit AB, CC_2 ja DB_1 leikkaavat samassa pisteessä eli pisteessä C_1.



Cevan lauseen mukaan tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

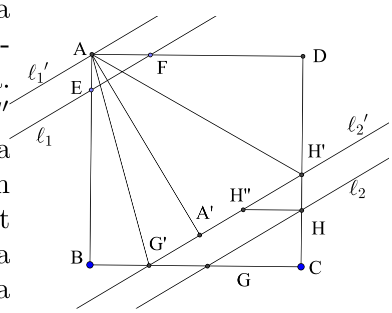
$$\frac{DB}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_2}{C_2D} = 1.$$

Mutta koska $\ell \| BB_1$,

$$\frac{DB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Cevan yhtälön kolmesta tulon tekijästä kaksi ensimmäistä supistuu pois, ja jäljelle jää $AC_2 = C_2D$. Siis C_2 on AD:n keskipiste. Mutta silloin H on yhdensuuntaisen janan BB_1 keskipiste.

146. Piirretään toinen pari ℓ_1' ja ℓ_2' samalla etäisyydellä a toisistaan olevia ja ℓ_1:n suuntaisia suoria niin, että ℓ_1' kulkee A:n kautta. Silloin ℓ_2' leikkaa CB:n ja CD:n pisteissä G' ja H'. Jos nyt AD:n suuntainen H':n kautta kulkeva suora leikkaa ℓ_2':n pisteessä H'', niin suorakulmaiset kolmiot EFA ja $H'H''H$ ovat yhteneviä. Niillä on siis sama piiri. Toisaalta $H''G'GH$ on suunnikas, joten $H''G' = HG$ ja $G'G = H''H$. Kolmion $G'CH'$ piiri on yhtä pitkä kuin murtoviiva $H'H''HGHH'$, joka



puolestaan on yhtä pitkä kuin kolmioiden AEF ja GHC piirien summa. On vielä osoitettava, että kolmion $G'CH'$ piiri ei riipu suorien suunnasta. Tätä varten tarkastellaan sitä ℓ_2':n pistettä A', jolle $AA' \perp \ell_2'$. Koska $AA' = a$, suorakulmaiset kolmiot ABG' ja $AA'G'$ sekä ADH' ja $AA'H'$ ovat yhteneviä. Siis $A'G' = BG'$ ja $A'H' = H'D$. Tästä seuraa, että kolmion $G'CH'$ piiri on neliön kahden sivun mittainen, siis $2a$.

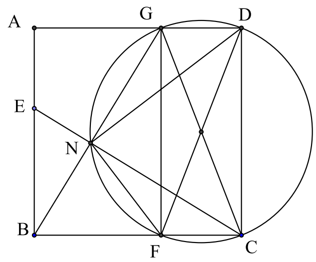
148. Kolmion kulmien ominaisuuden perusteella $\angle BCA$:n vieruskulma on kulmien $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ summa. Olkoon O ympyrän keskipiste. Silloin kolmiot OAC ja OBC ovat tasakylkisiä, joten $\angle ACO = \angle CAO$ ja $\angle OCB = \angle OBC$. Mutta tämä merkitsee, että myös kulma $\angle BCA$ on kulmien $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ summa. $\angle BCA$ on siis vieruskulmansa suuruinen ja suoran kulman määritelmän mukaan suora.

150. Riippumatta siitä, onko P Γ:n sisä- tai ulkopuolella ja riippumatta siitä missä järjestyksessä pisteet ovat, saadaan kehäkulmalausetta soveltamalla $PCB \sim PAD$, ja tästä

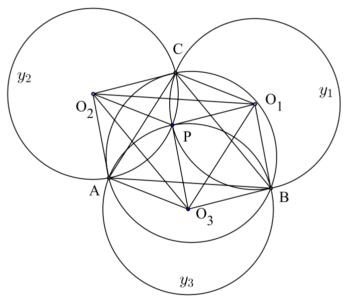
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

Väite seuraa, kun edellinen verranto kerrotaan ristiin.

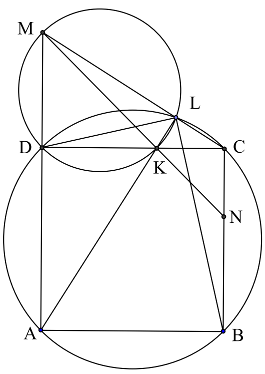
152. Olkoon G AD:n ja suoran BN leikkauspiste. Koska $CE \perp BG$, $\angle BCE = \angle ABG$. Kolmiot BCE ja ABG ovat yhteneviä (ksk). Siis $AG = AB = BF$ ja $DG = CF$. Nelikulmio $CDGF$ on suorakaide, ja sen ympäri voidaan piirtää ympyrä, jonka halkaisijoita ovat molemmat suorakaiteen lävistäjät CG ja FD. Koska $\angle CNG$ on suora, N sijaitsee ympyrällä. Koska DF on ympyrän halkaisija, $\angle DNF$ on suora.



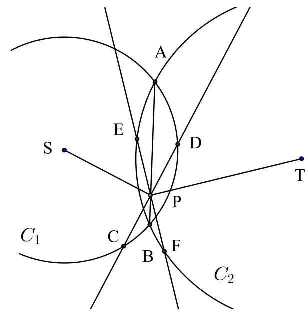
153. Olkoot tehtävän kolmella ympyrällä y_1, y_2 ja y_3 sama säde r ja keskipisteet O_1, O_2 ja O_3, ja olkoon A y_2:n ja y_3:n, B y_3:n ja y_1:n sekä C y_1:n ja y_2:n yhteinen piste. Kahden toisiaan leikkaavan ympyrän keskipisteet yhdistävä suora on ympyröiden leikkauspisteitä yhdistävän janan keskinormaali. Nelikulmioiden O_2PO_1C, O_1PO_2B ja O_3PO_2A lävistäjät ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten kaikki nelikulmiot ovat neljäkkäitä; neljäkkäiden kaikkien sivujen pituus on r. Mutta nyt esimerkiksi O_2A, PO_3 ja O_1B ovat yhdensuuntaisia. Nelikulmio O_2ABO_1 on siis suunnikas ja $O_2O_1 = AB$. Vastaavasti nähdään, että $O_3O_2 = BC$ ja $O_1O_3 = CA$. Kolmiot ABC ja $O_1O_2O_3$ ovat yhteneviä (sss). Koska kolmion $O_1O_2O_3$ ympäri piirretyn ympyrän säde on r, on myös ABC:n ympäri piirretyn ympyrän säde r.



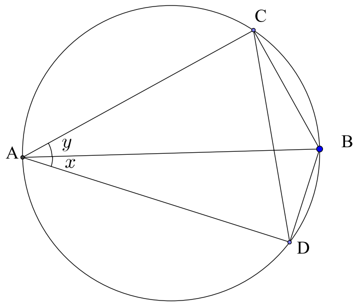
154. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $\angle LBN = \angle LMN$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle LBN = \angle LBC = \angle LDC$. Koska AC on neliön ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, Thaleen lauseesta seuraa, että $\angle ALC$ on suora kulma. Koska myös $\angle MDC$ on suora, nelikulmio $MDKL$ on jännenelikulmio. Mutta kun kehäkulmalausetta sovelletaan tämän nelikulmion ympäri piirrettyyn ympyrään, nähdään, että $\angle LMN = \angle LMK = \angle LDK = \angle LDC$, joten todistus on valmis.



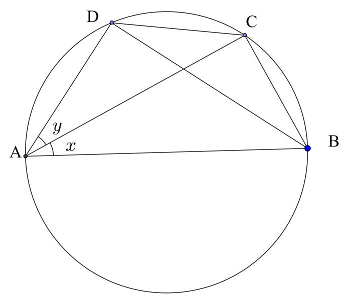
155. Kun lasketaan pisteen P potenssi ympyröiden C_1 ja C_2 suhteen, saadaan $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF$. Koska SP on kohtisuorassa jännettä CD vastaan, P:n on oltava CD:n keskipiste, joten $PC = PD$. Samoin saadaan $PE = PF$. Kaiken kaikkiaan $PC = PD = PE = PF = \sqrt{PA \cdot PB}$. Näin ollen pisteet C, D, E ja F ovat kaikki sillä P-keskisellä ympyrällä, jonka halkaisijoita ovat CD ja EF. Thaleen lauseen perusteella kulmat $\angle ECF$, $\angle CFD$ jne. ovat kaikki suoria. $CDEF$ on siis suorakaide.



156. Sinifunktion yhteenlaskukaavan perusteluista yksinkertaisimpia on seuraava Ptolemaioksen lauseen (numero 151) sovellus, joka toimii, kun x ja y ovat suoraa kulmaa pienempiä. Olkoon ympyrän halkaisija $AB = 1$ ja C ja D sellaiset eri puolilla AB:tä olevat kehän pisteet, että $\angle CAB = x$ ja $\angle BAD = y$. Thaleen lauseen nojalla $\angle ACB$ ja $\angle ADB$ ovat suoria kulmia, joten $AC = \cos x$, $BC = \sin x$, $AD = \cos y$ ja $BD = \sin y$. Koska kehäkulmaan liittyvä jänne on vain kulmasta, ei sen sijainnista riippuva suure, $CD = \sin(x + y)$. Ptolemaioksen lauseen mukaan $\sin(x + y) = AB \cdot CD = BC \cdot AD + AC \cdot BD = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.



Kosinin yhteenlaskukaava voidaan myös perustella Ptolemaioksen lauseen avulla, kun $x + y$ on suoraa kulmaa pienempi. Jos ympyrän halkaisija on $AB = 1$ ja C ja D ovat sellaiset samalla puolella AB:tä olevat kehän pisteet, että $\angle BAC = x$, $\angle CAD = y$, niin kulmat $\angle ADB$ ja $\angle ACB$ ovat suoria, $BC = \sin x$, $CD = \sin y$, $AC = \cos x$, $BD = \sin(x+y)$ ja $AD = \cos(x+y)$. Ptolemaioksen lauseen ja todistuksen edellisen osan perusteella $\sin y + \sin x \cos(x + y) = AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD = \cos x \sin(x+y) = \sin x \cos y \cos x + \cos^2 x \sin y$. Siis $\sin x \cos(x + y) = \sin x(\cos x \cos y) + (\cos^2 x - 1) \sin y = \sin x(\cos x \cos y) - \sin^2 x \sin y$. Kosinin yhteenlaskukaava saadaan, kun supistetaan luvulla $\sin x$.



159. Heronin kaavan johto voidaan tehdä algebrallisena pyörittelynä: $16T^2 = (2bc \sin\alpha)^2 = 4b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = 4b^2c^2-(2bc\cos\alpha)^2 = 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) = ((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b - c)^2) = ((b+c+a)(b+c-a))((a+b-c)(a-b+c)) = 2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b) =$

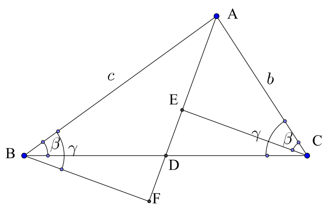
$16p(p-a)(p-b)(p-c)$. Heronin kaava tulee esiin, kun yhtälöketjun ääripäät jaetaan 16:lla ja otetaan neliöjuuri.

160. Käytetään tangenttifunktiota. Merkitään $\angle CAB = \alpha$, $\angle CPB = \beta$, $\angle CQB = \gamma$. Nyt $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{2}$ ja $\tan\alpha = 1$. Mutta

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{3\cdot 2}} = 1 = \tan\gamma.$$

Siis $\alpha + \beta = \gamma$, niin kuin väitettiin.

161. Olkoon F se puolisuoran AD piste, jolle $BF \perp AD$. Koska D on BC:n keskipiste, suorakulmaiset kolmiot BFD ja CED ovat yhteneviä (kks). Siis $BF = CE$. Koska $\angle ACE = \beta$ ja $\gamma = \beta \pm \angle ECD = \angle ABD \pm \angle DBF$, niin $\angle ABF = \gamma$. Siis $c\cos\gamma = BF = EC = b\cos\beta$. Mutta kosinilauseen perusteella



$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Yhtälö

$$b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

sievenee muotoon $b^2(c^2 + a^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$ ja edelleen muotoon $(c^2 - b^2)(c^2 + b^2 - a^2) = 0$. Jos ensimmäinen tulon tekijä on nolla, kolmio on tasakylkinen, jos toinen, kolmio on suorakulmainen Pythagoraan lauseen nojalla.

162. Kolmion kulmat ovat teräviä, jos niiden kosinit ovat positiivisia. Kosinilauseen nojalla $\cos A > 0$ jos ja vain jos $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Tehtävän yhtälöistä saadaan $b^2 + c^2 - a^2 = vw + vu - v^2 + wu + wv - w^2 - uv - uw + u^2 = u^2 - v^2 - w^2 + 2vw = u^2 - (v-w)^2 = (u - v + w)(u + v - w)$. Koska u, v, w ovat kolmion sivuja, kumpikin tulon tekijä on positiivinen, ja siis $\cos A > 0$. Samoin nähdään, että ABC:n muiden kulmien kosinit ovat positiivisia. Edelleen kosinilauseen perusteella

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(u + w - v)(u + v - w)}{2\sqrt{v}\sqrt{w + u - v}\sqrt{w}\sqrt{u + v - w}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{u^2 - v^2 - w^2 + 2vw}{2vw}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{v^2 + w^2 - u^2}{2vw}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos U}.$$

Kun yhtälöketjun ääripäät korotetaan toiseen potenssiin, saadaan $2\cos^2 A - 1 = -\cos U$ eli (koska A on terävä kulma) $\cos(2A) = -\cos U = \cos(180° - U)$. Siis $U = 180° - 2A$. Vastaavasti $V = 180° - 2B$ ja $U = 180° - 2C$.

163. Kolmion ABC kulmat ovat α, β ja γ. Olkoon $\angle ADB = \delta$. Kolmioista ABD ja ABC saadaan sinilauseen nojalla yhtälöt

$$\frac{b}{w} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}, \quad \frac{u}{w} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{w} = \frac{\sin\delta}{\sin\beta}, \quad \frac{v}{w} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\beta}.$$

Näin ollen

$$\frac{bc - uv}{w^2} = \frac{\sin^2\delta + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

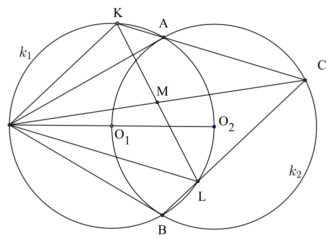
Osoitetaan, että edellisen yhtälön oikea puoli = 1. Kun käytetään hyväksi relaatiota $1 - 2\sin^2 = \cos 2x$ ja $\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) = 2\sin\beta\sin\gamma$, saadaan edelleen

$$\frac{bc - uv}{w^2} = \frac{\cos\alpha - \cos 2\delta}{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)}.$$

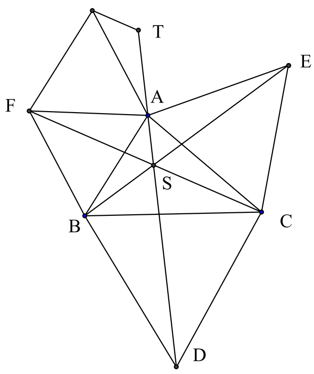
Kolmiosta ADC saadaan $\delta = \gamma + \dfrac{\alpha}{2}$, joten $2\delta = 2\gamma + \alpha = 180° - \beta + \gamma$ ja $\cos 2\delta = -\cos(\beta - \gamma)$. Lisäksi $\cos\alpha = \cos(180° - (\beta+\gamma)) = -\cos(\beta+\gamma)$. Edellisen murtolausekkeen osoittaja ja nimittäjä ovat samat, joten lauseke on 1.

164. Piirretään ympyrälle tangentti; olkoon sivuamispiste P. Valitaan tangentilta pisteet A' ja B' niin, että P on janan $A'B'$ keskipiste. Piirretään neliö $A'B'C'D'$. Suorat PC' ja PD' leikkaavat ympyrän myös pisteissä C ja D. Homotetia, jonka keskus on P ja jossa C' kuvautuu C:ksi muuntaa neliön $A'B'C'D'$ neliöksi $ABCD$. Pisteet A ja B ovat ympyrän tangentilla ja C ja D ympyrän kehällä, joten $ABCD$ on haluttu neliö.

165. Olkoot ympyröiden keskipisteet O_1 ja O_2 ja olkoon P O_2:n kuva peilauksessa yli pisteen O_1. Osoitetaan, että tehtävässä tarkoitettu mediaanisuora kulkee P:n kautta. Koska PO_2 on k_1:n halkaisija, $\angle PBO_2$ on suora, joten PB on k_2:n tangentti. Kun kuvio peilataan yli suoran O_1O_2, niin tangentti PB kuvautuu myös k_2:n tangentiksi PA. Kolmiot AO_1O_2 ja BO_2O_1 ovat tasasivuisia, joten $\angle BO_2A = 2 \cdot 60° = 120°$. Siis $\angle APB = 60°$. Koska $PA = PB$, kolmio PAB on tasasivuinen. Kaikki kehäkulmat, joita vastaa jokin jänteistä AB, PA, PB ovat $60°$:een kulmia. Siis $\angle PLB = \angle ACL$, joten $KC \| PL$. Vastaavasti $\angle PKA = 120°$ ja $\angle PLC = 180° - 60° = 120°$, joten $PK \| LC$. Siis $PLCK$ on suunnikas; koska suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, CP kulkee KL:n keskipisteen M kautta eli on tehtävässä tarkasteltava kolmion CKL mediaanisuora.

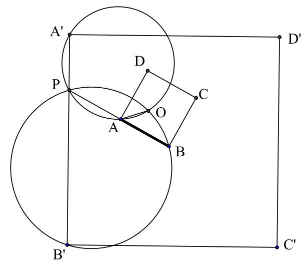


166. a) $60°$ kierto pisteen A ympäri vastapäivään muuntaa C:n E:ksi ja F:n B:ksi. Janojen BE ja FC välinen kulma on siis $60°$. Olkoon S näiden janojen leikkauspiste. Koska $\angle BSF = \angle BAF$, pisteet B, S, A, F ovat samalla ympyrällä. Samoin perustein myös pisteet A, S, C, E ovat samalla ympyrällä. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle FSA = 60°$ ja $\angle ASE = 60°$. Mutta tästä seuraa, että $\angle CSB = 360° - 4 \cdot 60° = 120°$. Näin ollen myös pisteet B, D, C, S ovat samalla ympyrällä. Edelleen kehäkulmalauseen nojalla $\angle BSD = \angle BCD = 60°$, joten $\angle ASD = 3 \cdot 60° = 180°$. Mutta tämä merkitsee sitä, että piste S on janalla AD, eli AD, BE, CF kulkevat kaikki pisteen S kautta.



b) $60°$ kierto F:n ympäri vie B:n A:ksi ja BS:n suoralle DA (joka on $60°$ kulmassa suoraan BS nähden). Siis S kuvautuu suoran DA pisteeksi T. Nyt $SF = ST = SA + AT = SA + SB$. Vastaavasti $SD = SB + SC$ ja $SE = SA + SA$. Väite saadaan, kun edelliset kolme yhtälöä lasketaan puolittain yhteen.

167. Osoitetaan, että $ABCD$ voidaan kuvata $A'B'C'D'$:ksi kierrosta ja homotetiasta yhdistetyllä kuvauksella niin, että kierrolla ja homotetialla on sama keskus O. Piste O pysyy kuvauksessa paikallaan, joten sen täytyy liittyä molemmissa kartoissa samaan maastonkohtaan. Pisteen O löytämiseksi haetaan ensin suorien AB ja $A'B'$ leikkauspiste P ja piirretään ympyrät pisteiden A, A', P ja B, B', P kautta. Olkoon O näiden ympyröiden leikkauspiste. Nyt kehäkulmalauseen perusteella



$\angle A'B'O = \angle PB'O = \angle PBO = \angle ABO$ ja $\angle B'A'O = \angle PA'O = \angle OAB$. Kolmiot $A'OB'$ ja AOB ovat yhdenmuotoisia. Kierto O:n ympäri kulman $\angle AOA'$ verran muuntaa kolmion AOB kolmioksi $A''OB''$, jonka sivut ovat kolmion $A'OB'$ suuntaiset ja O-keskinen homotetia vie kolmion $A''OB''$ kolmioksi $A'OB'$.

168. Täydennetään neliöksi: $x^2 + y^2 + ax + by + c = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{a^2 + b^2}{4}$. Ympyrän keskipiste on siis $(x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ ja säde $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$. – Yhtälö esittää ympyrää vain, kun $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

169. Kun $x_0 \neq x_1$ ja $y_0 \neq y_1$, ympyrän keskipisteen ja pisteen $(x_1,\, y_1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0})(x - x_0).$$

Tätä suoraa vastaan kohtisuoran, pisteen $(x_1,\, y_1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}(x - x_1)$$

eli $0 = (x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = (x_1 - x_0)(x - x_0 + x_0 - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_0 + y_0 - y_1) = (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2$. Tehtävän väite saadaan, kun otetaan huomioon, että $(x_1,\, y_1)$ on tehtävän ympyrän piste ja toteuttaa siis ehdon $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$.

170. Voidaan olettaa, että P on origo ja suorat m ja n suorat $x = a$ ja $x = b$. Kaksi P:n kautta kulkevaa suoraa ovat $y = px$ ja $y = qx$. Niiden ja suorien m ja n leikkauspisteet ovat $A_1 = (a,\, pa)$, $A_2 = (a,\, qa)$, $B_1 = (b,\, pb)$ ja $B_2 = (b,\, qb)$. Suorien A_1B_2 ja A_2B_1 yhtälöt ovat

$$y - pa = \frac{qb - pa}{b - a}(x - a), \qquad y - qa = \frac{pb - qa}{b - a}(x - a).$$

Kun yhtälöistä eliminoidaan y, saadaan suorien leikkauspisteen x-koordinaatille yhtälö

$$x = a + \frac{(q - p)a(b - a)}{qb - pa - pb + qa} = a + \frac{a(b - a)}{a + b} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Koska x-koordinaatti eo riipu p:stä ja q:sta, päätellään, että kaikki leikkauspisteet ovat suoralla $x = \dfrac{2ab}{a + b}$; tämä suora on m:n suuntainen.

171. Voidaan olettaa, että O on origo, suora AB on x-akseli ja ympyrän säde on 1. Silloin $A = (-1,\, 0)$, $B = (1,\, 0)$, $C = (0,\, 1)$. Olkoon $P = (a,\, b)$; koska piste on ympyrällä, $a^2 + b^2 = 1$. Suoran CP yhtälö on

$$y - 1 = \frac{b - 1}{a}x,$$

joten piste Q on $\left(0,\, \dfrac{a}{1 - b}\right)$. Janan QB pituus on $\dfrac{a}{1 - b} - 1 = \dfrac{a - 1 + b}{1 - b}$. Suoran AP yhtälö on

$$y = \frac{b}{a + 1}(x + 1),$$

ja pisteen R y-koordinaatti eli janan QR pituus

$$\frac{b}{a + 1}\frac{a + 1 - b}{1 - b} = \frac{b(a + 1) - b^2}{(a + 1)(1 - b)} = \frac{b(a + 1) - 1 + a^2}{(a + 1)(1 - b)} = \frac{b + a - 1}{1 - b}.$$

janat QB ja QR ovat siis yhtä pitkät.

172. Olkoon A origo ja $C = (1, 0)$, $B = (a, b)$, $a > 0$. Silloin $D = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ja $E = \left(a + \frac{2}{3}(1-a), \frac{b}{3}\right) = \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b}{3}\right)$. Suoran AE kulmakerroin on

$$k_1 = \frac{\frac{b}{3}}{\frac{a+2}{3}} = \frac{b}{a+2}.$$

Suoran DC kulmakerroin on

$$k_2 = \frac{-\frac{b}{2}}{1-\frac{a}{2}} = \frac{b}{2-a}.$$

Koska $\angle BAE = \angle ADC$, suorat AE ja DC muodostavat x-akseliin nähden saman kulman, mutta toinen on nouseva, toinen laskeva. Siis $k_2 = -k_1$. Tämä merkitsee yhtälöä

$$\frac{b}{a-2} = \frac{b}{a+2}$$

Jos $b \neq 0$, niin $-2 = 2$. Siis $b = 0$. Piste B on siis y-akselilla, joten $\angle BAC$ on suora kulma.

173. Kun tarkastelee kuviota, ja koska alkeisgeometriassa tarkastellaan suoria ja ympyröitä, tulee ounastelleeksi, että kysytty käyrä olisi ympyrän kaari. Siksi valitaan neliön kärkipisteiksi $A = (1, 2)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-1, 0)$ ja $D = (1, 0)$. Suoran BD yhtälö on $y = 1 - x$. Olkoon $X = (t, 1-t)$, $-1 \leq t \leq 1$. Silloin $E = (t, 2)$ ja $F = (1, 1-t)$. Edelleen suorien CF ja ED yhtälöt ovat

$$y = \frac{1-t}{2}(x+1) \quad \text{ja} \quad y = \frac{-2}{1-t}(x-1).$$

Ratkaistaan suorien leikkauspiste. Täksi saadaan

$$(x, y) = \left(\frac{-t^2+2t+3}{t^2-2t+5}, \frac{4(1-t)}{t^2-2t+5}\right) = \left(\frac{4-(1-t)^2}{4+(1-t)^2}, \frac{4(1-t)}{4+(1-t)^2}\right).$$

On helppo laskea, että $x^2 + y^2 = 1$. Piste Y on siis ympyrällä, jonka halkaisija on CD. Kun $-1 \leq t < 1$, x saa kaikki arvot väliltä $[0, 1[$ ja $y > 0$. Y kulkee siis mainitun ympyrän neljänneksen pisteestä D janan BD keskipisteeseen.

174. Valitaan piste Q origoksi ja sovitaan, että pisteiden R, S, T paikkavektorit eli vektorit $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{QS}$ ja $\overrightarrow{QT}$ ovat $2\vec{r}$, $2\vec{s}$ ja $2\vec{t}$. pisteiden A, B, C, D, E, F paikkavektoreiksi tulevat nyt $\vec{r}$, $\vec{s}+\vec{t}$, $\vec{s}$, $\vec{r}+\vec{t}$, $\vec{t}$, $\vec{r}+\vec{s}$. Nähdään jokseenkin välittömästi, että janojen AB, CD ja EF keskipisteen paikkavektori on $\frac{1}{2}(\vec{r}+\vec{s}+\vec{t})$. Janat leikkaavat toisensa keskipisteissään.

175. Valitaan origo O ja vektorit $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Silloin $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$ ja $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} - \vec{d})$. Oikeaksi todistettavan yhtälön vasen puoli on

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 + |\vec{d} - \vec{a}|^2 \\ &= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{a}). \end{aligned}$$

Yhtälön oikea puoli on

$$\begin{aligned} &AC^2 + BD^2 + 4 \cdot MN^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2 + |(\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{b} + \vec{d})|^2 \\ &= (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{d}) + |\vec{b} + \vec{d}|^2 + |\vec{a} + \vec{c}|^2 - 2(\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{d}) + (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &-2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{a}) = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{a}). \end{aligned}$$

Yhtälö on siis tosi.

176. Osoitetaan ensin, että $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Näin on, sillä $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Jos vastakkaisten särmien välinen kulma on α, niin pistetulon määritelmän perusteella $(\pm AB \cdot CD \pm BC \cdot AD \pm AC \cdot DB) \cos\alpha = 0$. Ellei ole $\cos\alpha = 0$, edellä sulkeissa olevista kolmesta tulosta jokin on yhtä suuri kuin kahden muun summa. Olkoon esimerkiksi $AB \cdot CD = BC \cdot AD + AC \cdot DB$. Silloin – Ptolemaioksen lauseen mukaan – tetraedrin särmät voitaisiin kaikki sijoittaa tasoon niin, että $ACBD$ olisi jännenelikulmio. Tämä ei ole mahdollista. Siis $\cos\alpha = 0$ ja $\alpha = 90°$. Olkoon nyt D' sellainen piste, että $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BD}$. Silloin $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB}$. Nyt kolmiot ACD' ja $D'DC$ ovat suorakulmaisia. Pythagoraan lauseen nojalla $AC^2 + BD^2 = AC^2 + AD'^2 = CD'^2 = CD^2 + DD'^2 = AB^2 + CD^2$. Koska $AC = BD$ ja $AB = CD$, on $AB = AC$. Vastaavasti näytetään, että $AB = AD$. Tetraedrin kaikki särmät ovat yhtä pitkiä, joten tetraedri on säännöllinen.

177. Vektorit kolmion ABC kärkiin origosta O eli pisteiden A, B, C paikkavektorit olkoot $2\vec{a}$, $2\vec{b}$, $2\vec{c}$. Kolmion sivujen keskipisteiden paikkavektorit ovat silloin $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ ja $\vec{c} + \vec{a}$. Kolmion keskijanat ovat $\vec{m}_c = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{m}_a = \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}$ ja $\vec{m}_b = \vec{c} + \vec{a} - 2\vec{b}$. Selvästi $\vec{m}_a + \vec{m}_b + \vec{m}_c = \vec{0}$. Vektorit $\vec{m}_a$, $\vec{m}_b$, $\vec{m}_c$ muodostavat peräkkäin sijoitettuna kolmion. Sijoitetaan tämä kolmio kolmioksi OPQ niin, että $\overrightarrow{OP} = \vec{m}_a$ ja $\overrightarrow{OQ} = -\vec{m}_c$. Kolmion OPQ sivujen keskipisteet ovat $\frac{1}{2}\vec{m}_a$, $\frac{1}{2}(\vec{m}_a - \vec{m}_c)$ ja $-\frac{1}{2}\vec{m}_c$. Sen keskijanat ovat $\frac{1}{2}(\vec{m}_a - \vec{m}_c)$, $\frac{1}{a}\vec{m}_a - (-\vec{m}_c)$ ja $-\frac{1}{2}\vec{m}_c - \vec{m}_a$. Kun näihin sijoitetaan $\vec{m}_a$:n ja $\vec{m}_c$:n lausekkeet, saadaan keskijanoiksi $\frac{3}{2}(\vec{b} - \vec{c})$, $\frac{3}{2}(\vec{c} - \vec{a})$ ja $\frac{3}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Mutta koska kolmion ABC sivut ovat $2(\vec{b}-\vec{c})$, $2(\vec{c}-\vec{a})$, $2(\vec{a}-\vec{b})$, keskijanat ovat kukin $\frac{3}{4}$ alkuperäisen kolmion sivuista. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset (sss).

179. Olkoon $A = 0$, $B = 1$ ja $C = z$. Pisteestä C piirretty keskijana yhdistää pisteet z ja $\frac{1}{2}$, joten sen keskipiste on $D = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$. Puolisuoran AD ja suoran BC leikkauspisteen ehto on

$$t\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1 + u(z-1),$$

missä t ja u ovat reaalilukuja. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2z+1)t - 4(z-1)u = 4.$$

Koska t ja u ovat reaalisia, toteutuu myös yhtälö

$$(2\overline{z}+1)t - 4(\overline{z}-1)u = 4.$$

Kun yhtälöistä eliminoidaan t, saadaan pienen algebrallisen pyörittelyn jälkeen $u = \frac{2}{3}$. Tämä merkitsee sitä, että tehtävän leikkauspiste jakaa BC:n suhteessa $2:1$.

180. Sijoitetaan kolmion kompleksitasoon niin, että $B = 0$, $C = 2$ ja $A = 2z$, $\mathrm{Im}z > 0$. Silloin $N = 1$, sivujen AB ja AC keskipisteet z ja $z+1$. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion korkeusjana on kannan puolikaan pituinen, joten $M = z + iz$ ja $P = z + 1 - i(z-1)$. Siis $MN = z + iz - 1$ ja $PN = z - iz + i$. Mutta $i(z - iz + i) = z + iz - 1$. MN saadaan siis kiertämällä PN:ää $90°$, joten PMN on tasakylkinen ja suorakulmainen kolmio.

181. Valitaan ympyrän säteeksi mukavuussyistä 2. Olkoon $\omega = e^{i\pi/3}$. Silloin $\omega^3 = e^{i\pi} = -1$ ja koska $\omega^3 + 1 = (\omega+1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0$, mutta $\omega \neq -1$, niin $\omega^2 = \omega - 1$. Koska ympyrän säteen mittainen jänne vastaa $60°$ kaarta ja ω:lla kertominen $60°$ kiertoa, niin kuusikulmion kärjiksi voidaan valita $A = 2$, $B = 2\omega$, $D = 2z$, $D = 2\omega z$, $E = 2w$ ja $F = 2\omega w$. Sivujen BC, DE ja FA keskipisteet ovat $P = \omega + z$, $Q = \omega z + w$ ja $R = \omega w + 1$. Kolmion PQR sivuja QP ja QR vastaavat kompleksiluvut $\omega + z - \omega z - w$ ja $\omega w + 1 - \omega z - w$. Mutta $\omega(\omega w + 1 - \omega z - w) = (\omega^2 - \omega)w + \omega - \omega^2 z = -w + (1-\omega)z + \omega$. QP saadaan siis QR:stä $60°$ kierrolla. Tämä osoittaa, että PQR on tasasivuinen kolmio.

182. Sijoitetaan pisteet kompleksitasoon niin, että $A = 0$, $B = 1$, $D = z$ ja $C = z_1 = z + a$, missä $\mathrm{Im}z > 0$ ja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Olkoon $\omega = e^{i\pi/3}$. Sen tasasivuisen kolmion, jonka kaksi kärkeä ovat A ja D eli 0 ja z kolmas kärki on $\overline{\omega}z$. Koska tämä piste on sivulla BC, on $z_1 = 1 + t(\overline{\omega}z - 1)$ jollain reaaliluvulla t. Mutta $z - z_1$ on reaalinen, joten $z - z_1 = \overline{z} - \overline{z}_1$. Siis $1 + t(\overline{\omega}z - 1) - z = 1 + (t(\omega\overline{z} - 1) - \overline{z}$ eli

$$t = \frac{\overline{z} - z}{\omega\overline{z} - \overline{\omega}z}.$$

Piste, joka on sen tasasivuisen kolmion kolmas kärki, jonka kaksi kärkeä ovat B ja C eli 1 ja z_1 on $1+\omega(z_1-1) = 1+t\omega(\overline{\omega}z-1) = 1+tz-\omega t$. Jotta tämä piste olisi A:n ja D:n eli 0:n ja z:n kautta kulkevalla suoralla, sen on oltava muotoa uz, missä u on reaalinen. Tämä toteutuu, jos $1-\omega t$ on z kerrottuna reaaliluvulla. Mutta kun käytetään edellä laskettua t:n lauseketta, saadaan todella

$$1-\omega t = \frac{\omega\overline{z}-\overline{\omega}z-\omega\overline{z}+\omega z}{\omega\overline{z}-\overline{\omega}z} = \frac{2i\mathrm{Im}(\omega)z}{2i\mathrm{Im}(\omega\overline{z})} = \text{reaaliluku}\cdot z.$$

9 Kirjallisuutta

Matematiikkakilpailuihin suoraan johdattelevaa suomenkielistä kirjallisuutta ei juuri ole. Tämän kirjoittajan toimittamat tehtäväkokoelmat *Koululaisten kansainväliset matematiikkaolympialaiset* (Kirjayhtymä 1974) ja *Matematiikan olympiakirja* (Weilin+Göös 1995) sisältävät Kansainvälisten matematiikkaolympiaöaisten ja Pohjoismaisen matematiikkakilpailun tehtävät ratkaisuineen vuoteen 1995 asti. Jälkimmäisestä löytyy myös suppea johdatus kilpailumatematiikkaan.

Kilpailumatematiikkaa tukevaa teoriaa suomen kielellä löytyy kaikista vanhan oppikoulun ajan geometrian oppikirjoista. Uudempi geometrian esitys on

Matti Lehtinen, Jorma Merikoski ja **Timo Tossavainen**: *Johdatus tasogeometriaan.* WSOY 2007, ISBN 978-951-0-31232-2, 163 s.

Perustietoa logiikasta, joukoista, funktioista, induktiotodistuksesta ja kombinatoriikasta antaa

Jorma Merikoski, Ari Virtanen ja **Pertti Koivisto**: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.* WSOY 2004, ISBN 951-0-29569-8, 188 s.

Lukuteorian tietoja lukion lukuteorian ja logiikan kurssia laajemmin ja varsin luettavasti löytyy teoksesta

K. Väisälä *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet.* Otava 1961, 232 s.

Internetistä löytyy luonnollisesti erittäin paljon kilpailumatematiikkaa ja tehtävänratkaisufoorumeita. Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaoston verkkosivuilla

`http://www.solmu.math.helsinki.fi/olympia`

on runsaasti tätä opasta täydentävää suomenkielistä aineistoa.

Englanninkielistä kilpailuvalmennuskirjallisuutta on runsaasti, sekä tehtäväkokoelmia että varsinaisia kilpailumatematiikan oppaita. Näitä julkaisevat sekä kaupalliset kustantajat että aatteellisemmalta pohjalta lähtevät yhteisöt kuten *Mathematical Association of America* ja *Australian Mathematics Trust.* Seuraavassa luettelossa on muutama hyvä teos.

G. Polya: *How to Solve It.* Princeton University Press, 2. painos 1974. ISBN 0-691-02356-5. 253 s. Ongelmanratkaisukirjallisuuden klassikko. Esittelee heuristisia tehtävänratkaisustrategioita.

Alexander Zawaira ja **Gavin Hitchcock**: *A Primer for Mathematics Competitions.* Oxford University Press 2009. 344 s. ISBN 978-0-19-953988-8. Kilpailumatematiikan oppikirjaksi kirjoitettu, melko alkeista lähtevä teos. Kahdeksan aihealoittain eriteltyä lukua. Harjoitusesimerkkeinä paljon monivalintakilpailujen tehtäviä. Tehtäviin on ratkaisut.

Paul Zeitz: *The Art and Craft of Problem Solving*. John Wiley & Sons, 2. painos 2007. ISBN 978-0-471-78901-7. 366 s. Ongelmanratkaisun strategiaa ja taktiikkaa, sitten aiheittain. Geometrian luku on otsikoitu Geometriaa amerikkalaisille! Runsaasti tehtäviä, mutta ilman ratkaisuja. Kirjoittaja kilpaili ensimmäisessä Yhdysvaltain Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin osallistuneessa joukkueessa 1974 ja hän on osallistunut USA:n joukkueen valmentamiseen.

Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*. Springer 1997. ISBN 0-387-98219-1. 403 s. Saksan matematiikkaolympiavalmennuksen yhteydessä syntynyt sangen kattava kilpailumatematiikan oppikirja. Tehtävänratkaisua aihealoittain ja strategioittain, esityksen yksityiskohtaisuus vaihtelee jonkin verran. 14 luvussa esitetään 165 tehtävänratkaisuesimerkkiä. Lisäksi yli 1100 tehtävää, ja (melkein) kaikkiin lyhyt ratkaisuviite.

Titu Andreescu ja **Răzvan Gelca**: *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser, 2. painos 2009. ISBN 978-0-8176-4528-1. 283 s. Kolme päälukua (geometria ja trigonometria, algebra ja analyysi, lukuteoria ja kombinatoriikka) jakautuvat kukin kymmeneen alalukuun, joissa esitellään jokin tehtävä- ja ratkaisuteema esimerkein ja harjoitustehtävin, joihin kaikkiin on myös ratkaisut.

Steven G. Krantz: *Techniques of Problem Solving*. American Mathematical Society 1997. ISBN 978-0-8218-0619-7. 465 s. Ei juuri pohjatietoja vaativa kirja. Suuntautuu ns. ajanvietetehtäviin, mutta esittelee paljon kilpailutyyppisiäkin tehtäviä. Amerikkalaisten oppikirjojen tapaan ratkaisut esitetään vain niille tehtäville, joiden järjestysnumero on pariton.

Loren C. Larson: *Problem-Solving through Problems*. Springer 1983. ISBN 0-387-96171-2. 332 s. Ensimmäisessä luvussa esitellään 12 heuristista periaatetta, toisessa induktio ja laatikkoperiaate. Muut kuusi lukua perustuvat eri aihealueisiin. Asian käsittely perustuu ratkaistuihin esimerkkitehtäviin, mutta kirjassa on runsaasti myös tehtäviä, joiden ratkaiseminen jätetään lukijalle.

Răzvan Gelca ja **Titu Andreescu**: *Putnam and Beyond.* Springer 2007. ISBN 978-0-387-25765. 798 s. Vaikka teos liittyy ennen muuta yliopistojen matematiikkakilpailuihin, vain lineaarialgebraa, abstraktia algebraa ja analyysiä käsittelevät osiot menevät yli koululaiskilpailujen aihealueen. 935 ratkaistua harjoitustehtävää.

Terence Tao: *Solving Mathematical Problems. A Personal Perspective*. Oxford University Press 2006. ISBN 978-0-920561-5. 103 s. Nuorena matematiikkaolympialaisissa menestyneen ja sittemmin matematiikan arvostetuimmalla huomionosoituksella Fieldsin mitalilla palkitun matemaatikon nuoruudenteos. Ratkaisustrategioita ja esimerkkitehtävien ratkaisuja.

Andy Liu: *Hungarian Problem Book III*. Mathematical Association of America 2001. ISBN 0-88385-644-1. 142 s. Kirjan runkona ovat Unkarin kuuluisan Eötvös–Kürschák-matematiikkakilpailun tehtävät vuosilta 1929–43, mutta niitä käsitellään aihealoittain ja kuhunkin teemaan liittyy jakso seikkaperäistä tehtävänratkaisuoppia.