

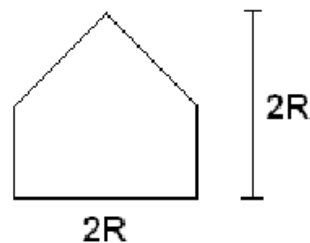
# Pythagoraan Polku -matematiikkakilpailu 2010

1. Rautatiejuna kulkee 27 sekunnissa yhtä monta kiskon pituutta, kuin se  $1\frac{1}{4}$  tunnissa kulkee kilometrejä. Pitkätkö ovat kiskot? (yo-tehtävä, syksy 1900)
2. Kuuden henkilön kesken arvotaan neljä samanlaista palkintoa. Monellako tavalla voitot voivat jakautua, kun sama henkilö voi voittaa useita palkintoja?
3. Luku 1234 ei ole jaollinen luvulla 11. Kun sen numeroiden järjestystä muutetaan, voidaan saada 11:llä jaollinen luku, esimerkiksi 1243. Etsi kaikki tällaiset luvun 1234 johdannaiset, jotka ovat yhdellätoista jaollisia.
4. Yhtälön  $x^3 - 3xy + y^3 = 0$  määrittelemä käyrä on ns. Cartesiuksen lehti. Määritä ne käyrän pisteet, joissa käyrän tangentti on vaakasuora tai pystysuora.
5. Ratkaise epäyhtälö

$$\frac{x^2 + 3x + \frac{9}{4}}{3 - \sqrt{3}} \leq \frac{(x + \sqrt{3})(2x^3 + 6x^2 + \frac{9}{2}x)}{x^2 - 3}.$$

6. Laske sellaisen munkkirinkilän eli toruksen tilavuus, jonka paksuus on 5 cm ja leveys 15 cm. Munkkirinkilän poikkileikkaus on ympyrä.
7. Piparkakkumuotti muodostuu säännöllisestä kahdeksankulmiosta ja sen sivuilla olevista kahdeksasta puoliympyrästä. Puoliympyrän halkaisija on kahdeksankulmion sivun mittainen. Piparitaikina kaulitaan ympyrän muotoon siten, että muotti mahtuu juuri sen sisään. Montako prosenttia taikinasta menee hukkaan (eli jää muotin ulkopuolelle)?
8. Kokonaisluku on *kasvava*, jos kaikissa sen kohdissa seuraava numero on suurempi tai yhtä suuri kuin edellinen numero. Esimerkiksi kokonaisluvut 167, 22588, 77777777 ja 345567999 ovat kasvavia. Kuinka monta kasvavaa kokonaislukua on välillä 0 ... 1 000000 000?

9. Suora ympyrälieriö leikataan kahdella tasolla siten, että tasojen ja lieriön vaipan välinen kulma on 45 astetta ja tasot ovat kohtisuorassa toisiaan vasten (Kuvassa on leikattu lieriö sivulta). Laske leikatun lieriön tilavuus, kun sen pohjan säde on  $R$  ja korkeus  $2R$ .



10. Kolmion korkeusjanojen pituudet ovat 1, 2 ja  $3/2$ . Laske sivujen pituudet.

11. Neliön sivun keskipisteestä piirretään yhdysjana toiseen vastakkaisista kärjistä. Laske niiden osien pituudet, joihin yhdysjana jakaa neliön lävistäjän. Neliön sivun pituus on  $a$ .

**12.** Lottoarvonnassa arvotaan seitsemän eri voitonnumeroa numeroista 1 ... 39. Millä todennäköisyydellä voitonnumeroissa on ainakin kaksi peräkkäistä numeroa?

**13.** Todista, että ei ole olemassa sellaisia kokonaislukuja  $a, b, c, d$ , jotka eivät kaikki ole nollia ja joilla  $a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$ .

**14.** a) Todista, että  $t \leq \tan t \leq t + t^3$ , kun  $0 \leq t \leq 1$ .

b) Määritä raja-arvo

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int_0^\pi \tan(y \sin x) dx.$$

**15.** Ympyrällä  $O$  on kaksi yhdensuuntaista tangenttia pisteissä  $M$  ja  $N$ . Kun ympyrälle piirretään kolmas tangentti pisteeseen  $P$ , se leikkaa yhdensuuntaiset tangentit pisteissä  $K$  ja  $L$ . Todista, että ympyrä, jonka halkaisija on jana  $KL$ , kulkee ympyrän  $O$  keskipisteen kautta.

**16.** Laske niiden tason pisteiden  $(x, y)$  määräämän alueen ala, jotka toteuttavat ehdon

$$|x| + |y| + |x + y| \leq 2.$$

**17.** Kovin tasalahjakas ylioppilaskokelas Adalmiina Abiturientti saa yo-kokeesta (aineesta kuin aineesta) arvosanan L todennäköisyydellä 0,6, arvosanan E todennäköisyydellä 0,3 ja huonona päivänä arvosanan M todennäköisyydellä 0,1. Adalmiinan tavoitteena on neljä laudaturia, ja hän kirjoittaa tasan neljä ainetta. Hän osallistuu kirjoituksiin syksyllä ja keväällä. Jo syksyllä hän osallistuu kaikkien neljän aineen kokeeseen. Millä todennäköisyydellä hänellä on neljä laudaturia keväällä? Millä todennäköisyydellä hän saavuttaa tavoitteensa jo syksyllä? Millä todennäköisyydellä hänellä on syksyllä vähintään yksi magna? Entä keväällä? (YO-todistuksessa lukee syksyn arvosanat, koska hän on osallistunut kaikkiin pakollisiin kokeisiin jo syksyllä...)

**18.** Etsi kaikki kolmiot, joiden kulmille  $A, B$  ja  $C$  pätee  $\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C = 1$ .

**19.** Haastan sinut korttipeliin: Sekoitetaan tavallinen korttipakka ja vedetään siitä kaksi korttia. Jos molemmat kortit ovat mustia, saat ne. Jos molemmat ovat punaisia, minä pidän ne. Jos tulee punainen ja musta kortti, kumpikaan ei saa niitä. Pelin aloitusmaksu sinulle on 1 euro. Peli loppuu, kun kortit pakasta loppuvat. Jos silloin sinulla on enemmän kortteja kuin minulla, minä maksan sinulle 3 euroa jokaisesta kortistasi. Jos minulla on enemmän kortteja, sinun ei tarvitse maksaa. Pelataanko?

**20.** Olkoot  $P$  ja  $Q$  sellaiset polynomit, joille yhtälö  $P(Q(x)) = Q(P(x))$  on voimassa kaikilla reaaliluvuilla  $x$ . Näytä, että jos yhtälöllä  $P(x) = Q(x)$  ei ole reaaliratkaisua, niin myöskään yhtälöllä  $P(P(x)) = Q(Q(x))$  ei ole.