

# Pythagoraan polku 20.4.2013

Ratkaiskaa jokainen tehtävä omalle paperilleen ja merkitkää joka paperiin tehtävän numero ja joukkueenne tunnus (tai koulun nimi).

1. Millä vakion  $a \in \mathbb{R}$  arvoilla yhtälöllä  $|x - 1| - |x - 2| + |x - 4| = a$  on täsmälleen 3 ratkaisua?

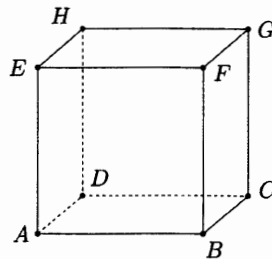
2. Puolisuunnikkaan sivut ovat 3, 3, 3 ja  $k$ , missä  $k$  on kokonaisluku. Määritä puolisuunnikkaan suurin mahdollinen pinta-ala.

3. Kuinka moni positiivinen kokonaisluku ei ole kirjoitettavissa muotoon  $100m + 3n$ , missä  $m$  ja  $n$  ovat luonnollisia lukuja?

4. Romeo ja Julia heittävät noppaa vuorotellen. Aina, kun heittäjää saa kuutosen, hän saa pisteen. Onnekas Romeo saa aina viidestä heitostaan yhden pisteen, mutta Julia saa pisteen aina kuudesta heitosta. Pelin voittaa se, joka saa ensin neljä pistettä. a) Osoita, että Romeo voi voittaa. b) Osoita,

ROMEO JULIA VOI VOITTAA

5. Kuution ABCDEFGH särmän pituus on  $a$ . Määritä kolmion  $EDC$  korkeusjanojen pituudet.



6. Osoita, että luku  $2013^{2014} - 2013$  on jaollinen luvulla  $2013^2 + 2014$ .

7. Etsi kaikki ei-negatiiviset kokonaislukuparit  $(x, y)$ , joille  $y^2(x + 1) = 1576 + x^2$ .

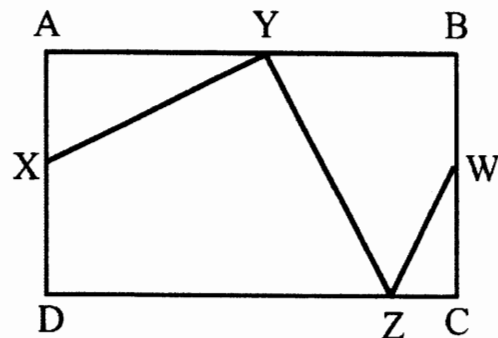
8. Tarkastellaan polynomiyhtälöitä  $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ , missä  $a$  ja  $b$  ovat kokonaislukuja. Etsi kaikki mahdolliset ei-negatiiviset kokonaisluvut  $r$ , joille sekä  $r$  että  $-r$  ovat jonkin tällaisen yhtälön ratkaisuja  $r$ .

9. Tarkastellaan yhtälöä  $x^{10} + ax + 1 = 0$ . Etsi kaikki reaaliluvut  $a$ , joille on voimassa: Jos  $r$  on yhtälön ratkaisu, niin myös  $1/r$  on ratkaisu.

10. Tarkastellaan lukujonoa  $x_1 = 34, x_2 = 334, x_3 = 3334, \dots, x_n = \underbrace{33 \dots 33}_n 4, \dots$ . Kuinka monta numeroa 3 on luvun  $9(x_n)^3$  kymmenjärjestelmäesityksessä?

11. Kolmiossa  $ABC$  on voimassa  $AB = AC$  ja  $\angle BAC = 100^\circ$ . Olkoon  $D$  kulman  $B$  puolittajan ja sivun  $AC$  leikkauspiste. Osoita, että  $BC = BD + DA$ .

12. Murtoviiva  $\overline{XYZW}$  on piirretty viereisen kuvan mukaisesti suorakulmion  $ABCD$  sisään. Murtoviivan  $\overline{XYZW}$  pituus on korkeintaan 2 pituusyksikköä ja  $XD = WC$ . Osoita, että suorakulmion  $ABCD$  ala on korkeintaan 1.



13. Etsi kokonaisluvut  $n \geq 2$ , joille  $(n - 1)!$  ei ole luvun  $n$  monikerta.

14. Etsi suurin kokonaisluku  $n$ , jolle luvuissa  $n$  ja  $2n$  ei ole toistuvia numeroita eikä luvuissa  $n$  ja  $2n$  ole yhteisiä numeroita. Esimerkiksi luvuissa  $n = 536$  ja  $2n = 1072$  mikään numero ei toistu ja luvuissa ei ole yhteisiä numeroita.

15. Äärettömän lukujonon  $f_1, f_2, f_3, \dots$  termit toteuttavat ehdon  $f_{\frac{x+y}{3}} = \frac{f_x + f_y}{2}$ ,

kun  $x, y$  ja  $\frac{x+y}{3}$  ovat positiivisia kokonaislukuja. Kuinka monta erillistä arvoa jonon termeissä esiintyy?

16. Olkoot  $a$ ,  $b$  ja  $c$  reaalilukuja siten, että yhtälön  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  kaikki ratkaisut ovat reaalisia. Osoita, että tällöin yhtälöllä ei ole lukua  $\frac{2\sqrt{a^2-3b-a}}{3}$  suurempia ratkaisuja.

17. Kuinka monella tavalla  $8 \times 8$  ruudukkoon voidaan sijoittaa pelinappuloita siten, että jokaisella vaaka- ja pystyriivillä on pariton määrä nappuloita. Yhteensä ruutuun voi laittaa korkeintaan yhden nappulan.

18. Laske integraalin  $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$  arvo, kun  $n = 1, 2, 3, \dots$

19. Olkoon  $a > 0$  ja  $f(x)$  välillä  $[0, a]$  määritelty jatkuva funktio, jolle on voimassa  
$$f(x)f(a-x) = 1.$$

i) Anna esimerkki funktiosta  $f$ .

ii) Todista, että funktioita  $f$  on ääretön määrä.

iii) Laske  $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$ .

20. Kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste on  $I$  ja säde  $r$ . Kulman  $\angle BAC$  puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä  $P$ . Sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivua  $BC$  pisteessä  $D$  ja suora  $PD$  leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä  $Q$ . Osoita, että jos  $PD = r$ , niin  $PI = QI$ .