Pythagoraan polku 2004
Päivölän kansanopisto, 17. 4. 2004

- Aikaa: kolme tuntia
- Sallittuja apuvälineitä ovat kirjoitusvälineet, harppi ja viivain. Erityisesti kiellettyjä ovat laskimet, kännykät ja taulukot.
- Kirjoita ratkaisut **siististi**, jokaisen tehtävän ratkaisu eri paperille tai papereille. Merkitse jokaiseen paperiin joukkueen tunnus ja tehtävän numero.

Tehtävä 1. Ratkaise reaalilukujen joukossa yhtälö

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Tehtävä 2. Ratkaise yhtälö

$$\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}.$$

Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua n, jolle $n \leq x$.

Tehtävä 3. Olkoot $a > 0$, b ja c reaalilukuja, joille

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$$

jollain positiivisella luvulla m. Osoita, että yhtälöllä

$$ax^2+bx+c=0$$

on ratkaisu x_0, jolle pätee $0 < x_0 < 1$.

Tehtävä 4. Osoita, että 1 048 576 on ainoa kokonaisluku välillä [1 000 000, 2 000 000], jota ei voida ilmaista kahden tai useamman peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summana.

Tehtävä 5. Taululle on kirjoitettu kymmenen kokonaislukua, joista jotkin voivat olla samoja. Kun lasketaan kaikki mahdolliset yhdeksän luvun summat, tuloksina saadaan seuraavat yhdeksän (!) lukua: 2000, 2001, 2002, 2003, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009. Mitkä luvut taululle on kirjoitettu?

Tehtävä 6. Olkoon L muotoa $4n+1$ olevien luonnollisten lukujen joukko:

$$L = \{\,1, 5, 9, 13, 17, \ldots\,\}.$$

Sanotaan L:n alkiota p *L-alkuluvuksi*, jos $p > 1$ eikä p:tä voida esittää pienempien L:n alkioiden tulona. Etsi L:n alkio, jonka voi esittää ainakin kahdella eri tavalla L-alkulukujen tulona (järjestyksen vaihtaminen ei tietenkään riitä).

Tehtävä 7. Olkoot suunnikkaan kärjet A, B, C ja D. Siirretään lävistäjä AC suuntansa säilyttäen alkamaan pisteestä B ja täydennetään tämän sivun ja lävistäjän BD aloittama suunnnikas. Osoita, että sen ala on täsmälleen kaksi kertaa alkuperäisen suunnikkaan ala.

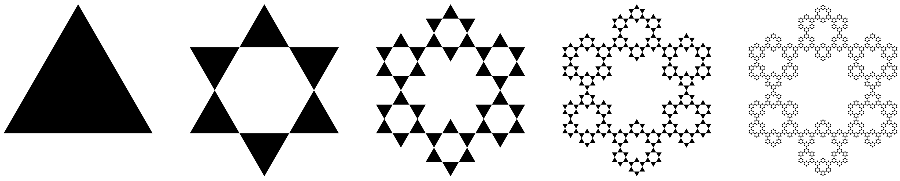
Tehtävä 8. Kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c, ja sivuja vastaan piirretyt korkeusjanat ovat h_a, h_b ja h_c. Oletetaan, että $a \geq b$. Osoita, että $a + h_a \geq b + h_b$. Milloin pätee yhtäsuuruus?

Tehtävä 9. Kuution projektio sen avaruuslävistäjää vastaan kohtisuoralle tasolle on kuusikulmio. Onko se säännöllinen? Laske kuusikulmion pinta-ala, kun kuution särmän pituus on s.

Tehtävä 10. Naparetkeilijä X lähtee liikkeelle Helsingistä (60° pohjoista leveyttä) edeten koko ajan tasaisella nopeudella v kohti koillista. (Oletetaan Maapallon säteeksi R.) Kuinka kauan retkeilijältä kestää päästä pohjoisnavalle?

Tehtävä 11. Todista, että jos kolmion korkeusjanojen leikkauspiste peilataan kolmion sivun (tai sen jatkeen) yli, kuvapiste on kolmion ympäri piirretyllä ympyrällä.

Tehtävä 12. Kuvassa on viisi ensimmäistä kuviota äärettömästä kuvioiden jonosta, jossa ensimmäisenä olevan kolmion sivun pituus on s. Kuvioiden pinta-alat ja piirit muodostavat kaksi lukujonoa. Määritä lukujonojen raja-arvot.



Tehtävä 13. Kumpi on suurempi, e^π vai π^e? Perustele!

Tehtävä 14. Osoita, että integraalin

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^{\lambda x}}\,\mathrm{d}x$$

arvo ei riipu parametrista λ.

Tehtävä 15. Tarkastellaan suorassa kulmassa olevaa kulmausta, jossa kaksi käytävää kohtaavat. Toisen käytävän leveys on x ja toisen y. Käytävästä toiseen halutaan kuljettaa vaakatasossa hyvin ohut, suora keppi. Kuinka pitkä keppi voi korkeintaan olla, jotta tämä on mahdollista?

Tehtävä 16. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen irrationaaliluku x, että x^x on rationaaliluku.

Tehtävä 17. Tutkitaan pintaa, joka syntyy, kun polynomin $P(x)$ kuvaaja välillä $0 \le x \le R$ $(R > 0)$ pyörähtää avaruudessa pystyakselin ympäri. Pyörähdyspinta on "malja", johon voidaan kaataa vettä, kun oletetaan, että $P(x)$ on parillista ja vähintään toista astetta, ja että sen korkeimman asteen termin kerroin on positiivinen. Oletetaan lisäksi, että sen kaikki nollakohdat ovat yksinkertaisia ja sijaitsevat avoimella välillä $]0, R[$. Merkitään

$$\begin{aligned} a &= \max\{P(x) : x \text{ on } P\text{:n lokaali minimipiste}\}, \\ b &= \min\{P(x) : x \text{ on } P\text{:n lokaali maksimipiste}\}, \qquad \text{ja} \\ c &= \min\{b, P(0), P(R)\}. \end{aligned}$$

Osoita, että jos vedenpinnan korkeus kaikissa maljan kuopissa on sama h (laskettuna pystyakselin koordinaateissa, ei maljan pohjalta!), niin muodostuvan rantaviivan pituus on vakio kaikilla $h \in\ ]a, c[$.

Tehtävä 18. Pythagoraan polun tehtävänvalintakomitea valitsi itselleen puheenjohtajaa kolmesta ehdokkaasta. Jokainen komitean 15 jäsenestä kirjoitti äänestyslippuun ehdokkaiden nimet paremmuusjärjestykseen. Havaittiin, että 11 lipussa oli asetettu ehdokas A ehdokkaan B edelle ja 9 lipussa ehdokas B ehdokkaan C edelle. Ehdokas A väitti, että enemmistön mielipide suosii siten järjestystä ABC. Ehdokas C protestoi, koska hänet oli asetettu 10 lipussa ehdokkaan A edelle. Kuinka monessa lipussa oli ensimmäisenä C?

Tehtävä 19. Kahden arpakuution tahkoille on kirjoitettu ei-negatiivisia kokonaislukuja. Kun kuutioita heitetään ja tulokset lasketaan yhteen, summa voi olla yhtä todennäköisesti mikä tahansa luvuista $1, 2, \ldots, n$. Millä n:n arvoilla tämä on mahdollista? Mitkä luvut tahkoille pitää tällöin kirjoittaa?

Tehtävä 20. Olkoon $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m + n > 2$. Tarkastellaan $m \times n$-ruudukkoa. Alussa vain ruudukon ulkoreunat on väritetty. Kaksi pelaajaa valitsee vuorotellen jonkin kahden vierekkäisen tai päällekkäisen ruudun yhteisen sivun ja värittää sen. Väritettyjä sivuja ei saa valita. Jos pelaaja saa vuorollaan jonkin ruudun viimeisen vapaan sivun väritettyä, saa hän tämän ruudun. Peli loppuu, kun kaikki sivut on väritetty, ja voittaja on se, jolla on enemmän ruutuja. Milloin aloittajalla, milloin toisella on voittostrategia, kun

(a) $m = 1$,

(b) m ja n ovat parittomia?

[Tehtävän laatijat eivät tunne ratkaisua mielivaltaisten lukujen m ja n tapauksessa.]