SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN FINAALI HELSINGISSÄ 3.3.2012
RATKAISUITA

(1) Laske

$$\frac{-2012}{1+(-2012)^2}+\ldots+\frac{-1}{1+(-1)^2}+\frac{0}{1+0^2}+\frac{1}{1+1^2}+\ldots+\frac{2012}{1+2012^2}.$$

Ratkaisu. Käy niin, että ensimmäisen ja viimeisen termin summa on nolla, toisen ja toiseksi viimeisen termin summa on nolla, ja niin edelleen. Tarkalleen ottaen, kun $n = 1, 2, \ldots, 2012$,

$$\frac{-n}{1+(-n)^2}+\frac{n}{1+n^2}=\frac{-n}{1+n^2}+\frac{n}{1+n^2}=0.$$

Lausekkeen arvo on siis nolla.

(2) Etsi jotkin luvut a, b ja c joille yhtälöllä

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

on ratkaisut $x = 3$, $x = 4$ ja $x = 5$. (Tässä $x^3 = x \cdot x \cdot x$ ja $x^2 = x \cdot x$.)

Ratkaisu. Yhtälöllä

$$(x-3)(x-4)(x-5) = 0$$

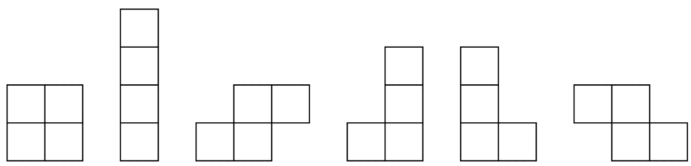
on ratkaisut $x = 3$, $x = 4$ ja $x = 5$. Auki kertomalla yhtälö muuttuu muotoon

$$x^3 - (3+4+5)x^2 + (3\cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5)x - 3 \cdot 4 \cdot 5 = 0$$

ja edelleen

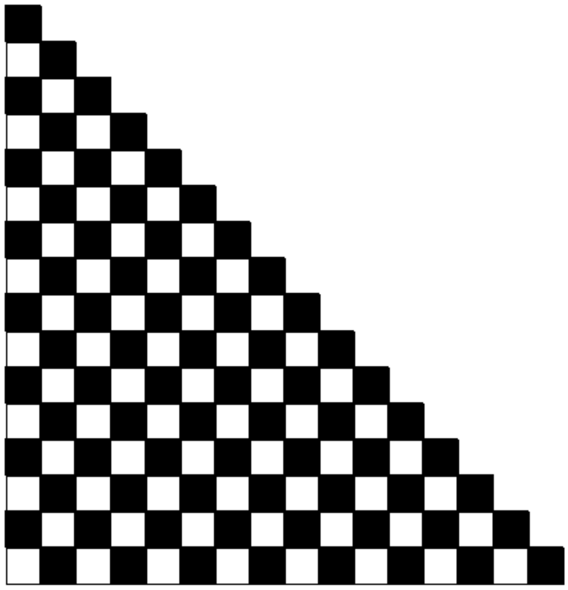
$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0.$$

(3) Käytössämme on seuraavia Tetris-palikoita niin paljon kuin haluamme:



Niitä voi käännellä ihan vapaasti kaikkiin mahdollisiin suuntiin. Onko näiden palikoiden avulla mahdollista peittää seuraava kuvio niin, että kaksi Tetris-palikkaa eivät mene päällekkäin, Tetris-palikoita ei saa leikata, ja ruudukon laidoilta ei saa yli mennä?

Ratkaisu. Väritetään peitettävä kuvio mustalla ja valkealla kuten shakkilaudat yleensä värjätään, vaikkapa niin, että pisimmän lävistäjän ruudut värjätään mustalla. Nyt jokainen Tetris-laatoistamme peittää täsmälleen kaksi mustaa ja kaksi valkeaa ruutua kerrallaan. Mutta kuviossamme on enemmän mustia kuin valkeita ruutuja! Ehkä helpoiten tämän näkee siitä, että joka toisella rivillä on yhtä monta mustaa kuin valkeaa ruutua, ja joka toisella rivillä on mustia ruutuja yksi enemmän kuin valkeita.



(4) Mitä kello on sekunnin tarkkuudella silloin, kun se on yhden ja kahden välissä, ja minuutti- ja tuntiviisarit ovat täsmälleen päällekkäin?

Ratkaisu. Olkoon kysytty kellonaika x minuuttia yli yksi, (missä x ei siis välttämättä ole kokonainen luku). Minuuttiviisarin ja pystysuoran suoran välinen kulma on

$$\frac{x}{60} \cdot 360^\circ = x \cdot 6^\circ.$$

Tuntiviisari kulkee $\frac{360^\circ}{12}$ suuruisen kulman yhdessä tunnissa, ja kysytyllä ajanhetkellä se muodostaa pystyakselin kanssa kulman, jonka suuruus on

$$\frac{360^\circ}{12} + \frac{x}{60} \cdot \frac{360^\circ}{12}.$$

Koska viisarit ovat päällekkäin, on siis oltava

$$\frac{360^\circ}{12} + \frac{x}{60} \cdot \frac{360^\circ}{12} = x \cdot 6^\circ.$$

Tästä seuraa kertomalla puolittain luvulla 12 ja jakamalla puolittain kulmalla 6°, että

$$60 + x = 12x.$$

Erityisesti siis $11x = 60$ ja

$$x = \frac{60}{11} = 5{,}45454545...$$

Sekuntimääräksi saadaan

$$60 \cdot \left(\frac{60}{11} - 5\right) = 60 \cdot \frac{5}{11} = \frac{300}{11} = 27{,}2...$$

Kysytty kellonaika on siis 1:05:27.

(5) Mikä tuloista $1 \cdot 2011$, $2 \cdot 2010$, $3 \cdot 2009$, $\ldots$, $2010 \cdot 2$ ja $2011 \cdot 1$ (kaikki kahden positiivisen kokonaisluvun tulot, joissa tulontekijöiden summa on 2012) on suurin?

Ratkaisu. Tarkastellaan tuloa $(1006 - n)(1006 + n)$, missä n kokonaisluku, jolle $-1006 < n < 1006$. Nyt

$$(1006 - n)(1006 + n) = 1006^2 - n^2.$$

Koska aina $n^2 \geqslant 0$, on tulo isoimmillaan, kun $n = 0$. Tuloista suurin on siis keskimmäinen, eli $1006 \cdot 1006$.