Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 18.1.2012

Tehtävät ja ratkaisut

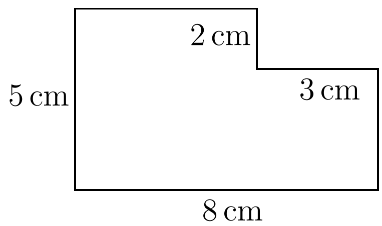
(1) Laske $6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1$.

a) 88 **b)** 66 **c)** 78 **d)** 76

Ratkaisu. Suoralla laskulla:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 - 60 + 24 - 6 = 60 + 18 = 78.$$

(2) Laske oheisen kuvion piiri.



a) 18 cm **b)** 25 cm **c)** 26 cm **d)** 30 cm.

Ratkaisu. Kuvion piiri on sama kuin $8\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm}$-suorakaiteen piiri, eli

$$8\,\mathrm{cm} + 8\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm} = 26\,\mathrm{cm}.$$

(3) Tasakylkisen kolmion kanta on 5 ja sen ala on 45. Mikä on sen korkeus?

a) 4,5 **b)** 18 **c)** 9 **d)** 112,5

Ratkaisu. Kolmion ala on puolet sen kannan ja korkeuden tulosta, joka tässä on 45. Siis kannan ja korkeuden tulo on $2 \cdot 45 = 90$. Nyt korkeuden täytyy olla viimeksi mainittu luku jaettuna kannalla, eli $\frac{90}{5} = 18$.

(4) Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 42. Luvuista keskimmäinen on

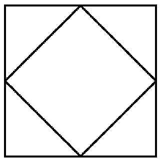
a) 13 **b)** 14 **c)** 15 **d)** 16.

Ratkaisu. Jos luvut ovat $x - 1$, x ja $x + 1$, niin

$$42 = (x - 1) + x + (x + 1) = 3x.$$

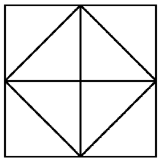
Täten $x = \dfrac{42}{3} = 14$.

(5) $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$-neliön vierekkäisten sivujen keskipisteet on yhdistetty, ja näin saatu keskelle alkuperäistä neliötä muodostettua pienempi neliö. Mikä tämän pienen neliön pinta-ala on?



a) $0{,}25\,\mathrm{m}^2$ **b)** $0{,}5\,\mathrm{m}^2$ **c)** $1\,\mathrm{m}^2$ **d)** $2\,\mathrm{m}^2$

Ratkaisu. Jaetaan kuvio samanlaisiksi pieniksi kolmioiksi seuraavasti:



Nyt suuremman neliön ala on kahdeksan pientä kolmiota kun taas pienemmän neliön ala on neljä pientä kolmiota. Pienen neliön ala on siis puolet ison neliön alasta, eli $0{,}5\,\mathrm{m}^2$.

(6) Pikkuruisen metsämökin rakentamiseen tarvitaan sata viiden metrin hirttä. Hirsi on aluksi kahdenkymmenen metrin pätkissä. Kuinka monta kertaa on vähintään sahattava hirsi poikki, jotta mökki voidaan rakentaa?

a) 50 **b)** 75 **c)** 99 **d)** 100

Ratkaisu. Yhdestä kahdenkymmenen metrin hirrestä saa kolmella sahauksella neljä viiden metrin hirttä. Siten $100 = 25 \cdot 4$ viiden metrin hirttä saa $25 \cdot 3 = 75$ sahauksella.

(7) Mitä on $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$?

a) 120 **b)** 720 **c)** 5040 **d)** 40320

Ratkaisu. Suoralla laskulla:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 6 \cdot 20 \cdot 42 = 120 \cdot 42 = 5040.$$

(8) Jaakko kiipeää ylös pavunvartta. Pavunvarsi on 88 m korkea. Aina Jaakon kivuttua viisi metriä jättiläinen ravistelee pavunvartta, ja Jaakko valuu alas metrin verran. Kun Jaakko on päässyt pavun huippuun, ei jättiläinen enää pysty ravistamaan häntä alas. Kuinka monta metriä Jaakko kiipeää yhteensä?

a) 88 m **b)** 100 m **c)** 109 m **d)** 110 m

Ratkaisu. Tietysti suurimman osan ajasta Jaakko kiipeää 5 metriä jokaista 4 metriä kohti jotka hän oikeasti etenee ylös päin. Täten, yllettyään 84 m korkeudelle, hänen on täytynyt kiivetä $\frac{5}{4} \cdot 84 = 5 \cdot 21 = 105$ metriä. Mutta nyt hän yltää pavunvarren huippuun 88 m korkeudelle yksinkertaisesti kiipeämällä neljä metriä lisää, eli kaiken kaikkiaan hän kiipeää $105 + 4 = 109$ metriä.

(9) Hartwall-areenalla järjestetään konsertti. Konsertin järjestäjät arvioivat, että jos lipun hinnaksi asetetaan x euroa, niin lipun ostaa $10000 + 400x - 10x^2$ fania. Järjestäjät pohtivat tulisiko lipun hinnan olla 30 vai 40 euroa. Kumpi valinta tuo paikalle enemmän ihmisiä? Kumpi hintavaihtoehto tuo järjestäjille enemmän lipputuloja?

a) 30 euroa tuo enemmän ihmisiä ja enemmän lipputuloja
b) 30 euroa tuo enemmän ihmisiä, ja 40 euroa enemmän lipputuloja
c) 40 euroa tuo enemmän ihmisiä, ja 30 euroa enemmän lipputuloja
d) 40 euroa tuo enemmän ihmisiä ja enemmän lipputuloja

Ratkaisu. Järjestäjien arvion mukaan siis 30 euron lippu toisi paikalle

$$10000 + 400 \cdot 30 - 10 \cdot 30^2 = 10000 + 12000 - 9000 = 13000$$

ihmistä, jotka maksaisivat lipuista tietenkin

$$13000 \cdot 30 = 390000 \, \text{euroa.}$$

Sen sijaan 40 euron lippu toisi paikalle

$$10000 + 400 \cdot 40 - 10 \cdot 40^2 = 10000 + 16000 - 16000 = 10000$$

ihmistä, jotka maksaisivat lipuista

$$10000 \cdot 40 = 400000 \, \text{euroa.}$$

Täten 30 euron lippu toisi paikalle enemmän ihmisiä ja 40 euron lippu toisi järjestäjille enemmän rahaa.

(10) Ville lähti myymään suklaamunia viisikerroksiseen taloon. Yläkerroksen asukas osti munista puolet ja lisäksi puolikkaan munan. Neljännen kerroksen asukas osti puolet jäljellä olevista munista ja puolikkaan munan. Samoin tekivät kolmannen, toisen ja ensimmäisen kerroksen asukkaat. Tämän jälkeen Ville huomasi, että kaikki munat olivat menneet kaupaksi. Montako suklaamunaa Villellä alunperin oli?

a) 7 **b)** 15 **c)** 23 **d)** 31

Ratkaisu. Koska ensimmäisen kerroksen asukas osti puolet jäljellä olleista munista ja jäljelle jäi vain puolikas muna, oli Villellä ensimmäiseen kerrokseen laskeutuessaan täsmälleen yksi muna jäljellä.

Samoin, toisen kerroksen asukkaan ostettua puolet jäljellä olleista munista, mutta ennen kuin hän osti puolikkaan munan, Villellä on täytynyt olla puolitoista suklaamunaa. Täten Villellä oli toiseen kerrokseen saapuessaan $2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$ munaa.

Samassa hengessä Villellä on täytynyt olla kolmanteen kerrokseen laskeutuessaan $2 \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) = 7$ munaa, neljänteen kerrokseen saapuessaan $2 \cdot \left(7 + \frac{1}{2}\right) = 15$ munaa, ja aivan alussa $2 \cdot \left(15 + \frac{1}{2}\right) = 31$ munaa.

(11) Olkoon $X = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 70$. Kuinka suuri on X?

a) 1001 **b)** 2485 **c)** 3110 **d)** 4953

Ratkaisu. Tarkastellaan lukua $2X$: se on lukujen

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 69 & 70 \\ 70 & 69 & 68 & 67 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

summa. Mutta näiden summa on tietenkin $70 \cdot 71 = 4970$. Siispä

$$X = \frac{4970}{2} = 2485.$$

(12) Tarkastellaan lukua $N = 11 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 11$, missä tulontekijöitä on 2012 kappaletta. Mitkä ovat luvun N kaksi viimeistä numeroa?

a) 11 **b)** 21 **c)** 31 **d)** 41

Ratkaisu. Kysymyksen ideana on, että luonnollisten lukujen tulon kaksi viimeistä numeroa riippuvat vain kummankin tulontekijän kahdesta viimeisestä numerosta. Riittää siis tarkastella kertolaskuja vain kahden viimeisen numeron suhteen.

Aloitetaan:

$$\begin{cases} 11 \cdot 11 = 121, & 11 \cdot 51 = 561, \quad 11 \cdot 91 = 1001, \\ 11 \cdot 21 = 231, & 11 \cdot 61 = 671, \quad 11 \cdot \ \ 1 = 11. \\ 11 \cdot 31 = 341, & 11 \cdot 71 = 781, \\ 11 \cdot 41 = 451, & 11 \cdot 81 = 891, \end{cases}$$

Siis luvun 11 potenssien jonossa $11, 11 \cdot 11, 11 \cdot 11 \cdot 11, \ldots$ viimeiset kaksi numeroa muodostavat itseään toistavan jonon:

$$11, \quad 21, \quad 31, \quad 41, \quad 51, \quad 61, \quad 71, \quad 81, \quad 91, \quad 01, \quad 11, \quad \ldots$$

Tässä jonossa kymmenes, kahdeskymmenes, kolmaskymmenes, ja niin edelleen, jäsen on 01, eli luvun $11 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 11$, missä on 2010 tulontekijää, kaksi viimeistä numeroa ovat 01. Seuraavan tulon kaksi viimeistä numeroa ovat siis 11, ja sen tulon, missä on 2012 tulontekijää, kaksi viimeistä numeroa ovat 21.

(13) Mitä on $\dfrac{789}{999} - \dfrac{12}{99}$?

a) 0,668688... **b)** 0,666... **c)** 0,668577... **d)** 0,668668...

Ratkaisu. Kun on ensin jotenkin todennut, että

$$\frac{789}{999} = 0{,}789789789\ldots \quad \text{ja} \quad \frac{12}{99} = 0{,}12121212\ldots,$$

niin loppu on helppoa:

$$\frac{789}{999} - \frac{12}{99} = 0{,}789789789\ldots - 0{,}12121212\ldots = 0{,}668577\ldots$$

Murtolukujen $\dfrac{789}{999}$ ja $\dfrac{12}{99}$ arvot on helppo perustella suoraan: onhan

$$\begin{aligned}999 \cdot 0{,}789789\ldots &= 1000 \cdot 0{,}789789\ldots - 0{,}789789\ldots \\ &= 789{,}789789\ldots - 0{,}789789 = 789,\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}99 \cdot 0{,}1212\ldots &= 100 \cdot 0{,}1212\ldots - 0{,}1212\ldots \\ &= 12{,}1212\ldots - 0{,}1212\ldots = 12.\end{aligned}$$

(14) Olkoon $X = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} + \frac{1}{15625}$. Mitä voidaan sanoa luvusta X?

a) $0 < X \leqslant \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{3}{4} < X \leqslant 1$

Ratkaisu. Huomataan, että kaikki nimittäjät ovat luvun viisi potensseja:

$$X = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6}.$$

Nyt

$$\frac{1}{5} + \frac{X}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{5^7} = X + \frac{1}{5^7}.$$

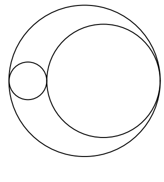
Siis $\frac{1+X}{5} > X$ ja $1 + X > 5X$, mistä nähdään, että $1 > 4X$ ja edelleen, että $X < \frac{1}{4}$.

Vaihtoehtoisesti voitaisiin vain laventaa kaikkiin termeihin sama nimittäjä:

$$X = \frac{3125 + 625 + 125 + 25 + 1}{15625} = \frac{3951}{15625}.$$

Koska $4 \cdot 3951 = 14004 < 15625$, on $X < \frac{1}{4}$.

(15) Ympyrän muotoisen alueen ala on 80. Sen sisältä poistetaan oheisen kuvan mukaisesti kaksi erillistä ympyrän muotoista aluetta, joista toisen halkaisija on neljäsosa ja toisen halkaisija on kolme neljäsosaa alkuperäisen ympyrän halkaisijasta.



Mikä on jäljelle jäävän alueen ala?

a) 20 **b)** 30 **c)** 40 **d)** 50

Ratkaisu. Kun mittakaava puolitetaan, pinta-alat pienenevät neljäsosaan. Kun mittakaava jaetaan neljällä, pinta-alat pienenevät siis kuudestoistaosaan. Siis pienimmän ympyrän ala on $\frac{80}{16} = 5$.

Samassa hengessä, kun mittakaava kolminkertaistetaan, alat yhdeksänkertaistuvat, ja siksi toiseksi isoimman ympyrän ala on $9 \cdot 5 = 45$.

Jäljelle jäävän alueen ala on siis $80 - 5 - 45 = 30$.