Oulun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 18.1.2012

Tehtävät ja ratkaisut

(1) Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 42. Luvuista keskimmäinen on

a) 13 **b)** 14 **c)** 15 **d)** 16.

Ratkaisu. Jos luvut ovat $x-1$, x ja $x+1$, niin

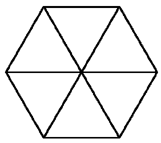
$$42 = (x-1) + x + (x+1) = 3x.$$

Täten $x = \frac{42}{3} = 14$.

(2) Säännöllisen kuusikulmion sivun pituus on 5. Mikä on sen halkaisijan (kärjestä vastakkaiseen kärkeen) pituus?

a) 5 **b)** $5\sqrt{3}$ **c)** 10 **d)** $10\sqrt{3}$

Ratkaisu. Säännöllisen kuusikulmion voi jakaa tasasivuisiksi kolmioiksi seuraavan kuvan osoittamalla tavalla:



Nyt tietenkin säännöllisen kuusikulmion lävistäjän täytyy olla kaksi kertaa niin pitkä kuin mitä sen sivu on, eli tässä tapauksessa $2 \cdot 5 = 10$.

(3) Laske $9 \cdot 8 - 8 \cdot 7 + 7 \cdot 6 - 6 \cdot 5$.

a) 38 **b)** -28 **c)** -38 **d)** 28

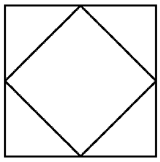
Ratkaisu. Tämän voi laskea suoraan:

$$9 \cdot 8 - 8 \cdot 7 + 7 \cdot 6 - 6 \cdot 5 = 72 - 56 + 42 - 30 = 16 + 12 = 28.$$

Voisimme myös hyödyntää termien yhteisiä tekijöitä:

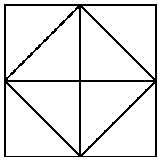
$$\begin{aligned} 9 \cdot 8 - 8 \cdot 7 + 7 \cdot 6 - 6 \cdot 5 &= (9-7) \cdot 8 + (7-5) \cdot 6 \\ &= 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 16 + 12 = 28. \end{aligned}$$

(4) $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$-neliön vierekkäisten sivujen keskipisteet on yhdistetty, ja näin saatu keskelle alkuperäistä neliötä muodostettua pienempi neliö. Mikä tämän pienen neliön pinta-ala on?



a) $0{,}25\,\mathrm{m}^2$ **b)** $0{,}5\,\mathrm{m}^2$ **c)** $1\,\mathrm{m}^2$ **d)** $2\,\mathrm{m}^2$

Ratkaisu. Jaetaan kuvio samanlaisiksi pieniksi kolmioiksi seuraavasti:



Nyt suuremman neliön ala on kahdeksan pientä kolmiota kun taas pienemmän neliön ala on neljä pientä kolmiota. Pienen neliön ala on siis puolet ison neliön alasta, eli $0{,}5\,\mathrm{m}^2$.

(5) Mitkä ovat luvun $25 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 25$ kaksi viimeistä numeroa?

a) 25 **b)** 35 **c)** 45 **d)** 55

Ratkaisu. Tehtävän ajatus on siinä havainnossa, että kahden luonnollisen luvun tulon kaksi viimeistä numeroa määräytyvät vain ja ainoastaan kummankin luvun kahdesta viimeisestä numerosta. Koska tulo $25 \cdot 25 = 625$ päättyy numeroihin 25, päättyy minkä tahansa numeroihin 25 päättyvien lukujen tulo myös samoihin numeroihin 25. Erityisesti tulon $25 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 25$ on päätyttävä numeroihin 25.

(6) Pikkuruisen metsämökin rakentamiseen tarvitaan sata viiden metrin hirttä. Hirsi on aluksi kahdenkymmenen metrin pätkissä. Kuinka monta kertaa on vähintään sahattava hirsi poikki, jotta mökki voidaan rakentaa?

a) 50 **b)** 75 **c)** 99 **d)** 100

Ratkaisu. Yhdestä kahdenkymmenen metrin hirrestä saa kolmella sahauksella neljä viiden metrin hirttä. Siten $100 = 25 \cdot 4$ viiden metrin hirttä saa $25 \cdot 3 = 75$ sahauksella.

(7) Raksilan hallissa järjestetään konsertti. Konsertin järjestäjät arvioivat, että jos lipun hinnaksi asetetaan x euroa, niin lipun ostaa $10000 + 400x - 10x^2$ fania. Järjestäjät pohtivat tulisiko lipun hinnan olla 30 vai 40 euroa. Kumpi valinta tuo paikalle enemmän ihmisiä? Kumpi hintavaihtoehto tuo järjestäjille enemmän lipputuloja?

a) 30 euroa tuo enemmän ihmisiä ja enemmän lipputuloja
b) 30 euroa tuo enemmän ihmisiä, ja 40 euroa enemmän lipputuloja
c) 40 euroa tuo enemmän ihmisiä, ja 30 euroa enemmän lipputuloja

d) 40 euroa tuo enemmän ihmisiä ja enemmän lipputuloja

Ratkaisu. Järjestäjien arvion mukaan siis 30 euron lippu toisi paikalle

$$10000 + 400 \cdot 30 - 10 \cdot 30^2 = 10000 + 12000 - 9000 = 13000$$

ihmistä, jotka maksaisivat lipuista tietenkin

$$13000 \cdot 30 = 390000\,\text{euroa.}$$

Sen sijaan 40 euron lippu toisi paikalle

$$10000 + 400 \cdot 40 - 10 \cdot 40^2 = 10000 + 16000 - 16000 = 10000$$

ihmistä, jotka maksaisivat lipuista

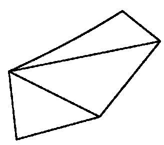
$$10000 \cdot 40 = 400000\,\text{euroa.}$$

Täten 30 euron lippu toisi paikalle enemmän ihmisiä ja 40 euron lippu toisi järjestäjille enemmän rahaa.

(8) Mikä on viisikulmion kulmien summa?

a) 480° **b)** 540° **c)** 600° **d)** 720°

Ratkaisu. Kolmion kulmien summa on 180° ja viisikulmion voi jakaa kolmeksi kolmioksi siten, että sen kulmien summa on sama kuin kyseisten kolmen kolmion kulmien summa:



Siten viisikulmion kulmien summa on $3 \cdot 180° = 540°$.

(9) Veljekset Ibrahim ja Hussein olivat matkallaan leiriytyneet tien varteen, ja valmistautuivat syömään iltapalaa. Ibrahim oli tehnyt evääksi 5 voileipää ja Hussein 3. Paikalle tuli muukalainen, joka myös oli nälkäinen. Hän pyysi veljeksiltä evästä, ja lupasi maksaa osuudestaan 8 kultarahaa. Näin sovittiin, ja kaikki kolme söivät leipää yhtä paljon. Miten veljesten tuli jakaa 8 kultarahaa, jotta he molemmat saisivat saman hinnan muukalaiselle antamaansa leivänpalaa kohti?

a) 4 kultarahaa molemmille. **b)** Ibrahimille 5 ja Husseinille 3.
c) Ibrahimille 6 ja Husseinille 2. **d)** Ibrahimille 7 ja Husseinille 1.

Ratkaisu. Yhteensä leipiä oli 8, eli jokainen söi $\frac{8}{3}$ leipää. Ibrahim antoi omista leivistään pois $5 - \frac{8}{3} = \frac{15-8}{3} = \frac{7}{3}$. Hussein sen sijaan antoi omista leivistään pois $3 - \frac{8}{3} = \frac{9-8}{3} = \frac{1}{3}$. Siis Ibrahim antoi pois seitsemän kertaa niin paljon leipää kuin Hussein ja Ibrahim ansaitsee seitsemän kultarahaa ja Hussein ansaitsee yhden.

(10) Onko luku $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \ldots + 2008 \cdot 2010 \cdot 2012$ parillinen vai pariton?

a) Se on parillinen. **b)** Se on pariton.

Ratkaisu. Summassa joka toinen termi on pariton ja joka toinen on parillinen. Summa on parillinen tai pariton sen mukaan onko siinä parillinen vai pariton määrä parittomia termejä. Termien ensimmäiset tekijät ovat 1, 2, 3, ..., 2008. Termejä on siis 2008 kappaletta ja täsmälleen puolet niistä, eli 1004 kappaletta, ovat parittomia.

Koska summassa on 1004 eli parillinen määrä parittomia termejä, on sen oltava parillinen.

(11) Olkoon $X = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$. Mitä voidaan sanoa luvusta X?

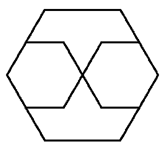
a) $0 < X \leqslant \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{3}{4} < X \leqslant 1$

Ratkaisu. Varmasti $X > \frac{1}{4}$. Toisaalta voimme päätellä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} &< \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Täten $\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2}$.

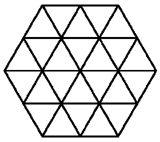
(12) Säännöllisen kuusikulmion muotoisen alueen ala on 10. Sen sisältä poistetaan oheisen kuvan mukaisesti kaksi säännöllisen kuusikulmion muotoista aluetta, joiden molempien läpimitta (kärjestä vastakkaiseen kärkeen) on täsmälleen puolet alkuperäisen kuusikulmion läpimitasta (kärjestä vastakkaiseen kärkeen).



Mikä on jäljelle jäävän alueen ala?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6

Ratkaisu. Voimme ratkaista tehtävän vaikkapa jakamalla koko kuvion yhtä suuriksi pieniksi tasasivuisiksi kolmioiksi:



Nyt ison kuusikulmion ala on 24 pientä kolmiota ja kummankin pienen kuusikulmion ala on 6 pientä kolmiota. Pienten kuusikulmioiden ala on siis $6 + 6 = 12$, eli puolet ison kuusikulmion alasta. Jäljelle jäävä ala on siis myös puolet ison kuusikulmion alasta, eli $\frac{10}{2} = 5$.

Voisimme päätellä myös seuraavalla tavalla: Kun mittakaava puolitetaan, pinta-alat pienenevät neljäsosaan. Siten kummankin pienen kuusikulmion ala on täsmälleen neljäsosa ison kuusikulmion alasta. Siten jäljelle jäävä ala on $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, eli puolet ison kuusikulmion alasta, eli $\frac{10}{2} = 5$.

(13) Kuinka monta on sellaisia kokonaislukujen pareja x, y, joille $1 + x^2 = y^2$?

a) 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** enemmän kuin 4

Ratkaisu. Yhtälö sanoo, että neliöluvut x^2 ja y^2 ovat yhden etäisyydellä toisistaan. Neliölukuja ovat $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, ja niin edelleen. Näyttäisi siltä, että ainoat yhden etäisyydellä toisistaan olevat neliöluvut olisivat 0 ja 1. Tämä pitääkin paikkaansa ja on helppo perustella: Kun n on positiivinen kokonaisluku, niin lukujen n^2 ja $(n+1)^2$ erotus on

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geqslant 2 \cdot 1 + 1 = 3 > 1,$$

eivätkä ne voi olla yhden etäisyydellä toisistaan.

Siis yhtälö $1 + x^2 = y^2$ voi toteutua vain silloin kun $x^2 = 0$ ja $y^2 = 1$, eli kun $x = 0$ ja $y = 1$, tai $x = 0$ ja $y = -1$. Kysyttyjä kokonaislukujen pareja on siis täsmälleen kaksi kappaletta.

(14) Kolmion eräs kulma on $72°$ ja sen kahden muun kulman erotus on $48°$. Mikä on kolmion isoin kulma?

a) $72°$ **b)** $78°$ **c)** $82°$ **d)** $88°$

Ratkaisu. Olkoon kolmion kaksi muuta kulmaa x ja $x+48°$. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, on

$$180° = 72° + x + x + 48° = 120° + 2x,$$

mistä seuraa, että $2x = 180° - 120° = 60°$, ja edelleen, että $x = 30°$. Kolmion kulmat ovat siis $72°$, $30°$ ja $30° + 48° = 78°$. Isoin näistä on $78°$.