Loppukilpailu 23.3.2013
Ratkaisuita

1. Erään tuotteen hintaa korotetaan 5%. Myöhemmin sitä korotetaan uudelleen 5%. Kuinka monta prosenttia hintaa pitää laskea, että se palaisi takaisin alkuperäiselle tasolleen? [Anna tarkka arvo ja likiarvo yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.]

Ratkaisu. Olkoon alkuperäinen hinta x. Ensimmäisen korotuksen jälkeen hinta on $\left(1+\frac{5}{100}\right)x$, ja toisen korotuksen jälkeen

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)x = \left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)x = \frac{21}{20}\cdot\frac{21}{20}\cdot x = \frac{441}{400}\cdot x.$$

Hintaa pitää laskea $\frac{41}{400}x$ verran, mikä on

$$100\cdot\frac{41/400}{441/400} = 100\cdot\frac{41}{441} = \frac{4100}{441}$$

prosenttia uusimmasta hinnasta.

Hintaa pitää siis laskea $\frac{4100}{441}\% \approx 9\%$.

2. Kokonaisluvusta n tiedetään, että molemmat luvuista $\frac{n}{8}$ ja $\frac{n}{11}$ ovat suurempia kuin kaksi ja pienempiä kuin kolme. Mikä luku n on?

Ratkaisu. Koska $2 < \frac{n}{8} < 3$, on oltava $16 < n < 24$. Samoin, koska $2 < \frac{n}{11} < 3$, on oltava $22 < n < 33$. Siis $22 < n < 24$, ja täytyy olla $n = 23$.

3. Määrittelemme Fibonaccin lukujen jonon seuraavasti: Jonon ensimmäinen luku on 1, samoin toinen luku. Näiden jälkeen seuraava luku saadaan aina laskemalla kaksi edellistä yhteen. Jonon alku on

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad 13,\quad 21,\quad \ldots$$

Onko jonon 2013. luku parillinen vai pariton?

Ratkaisu. Kahden parittoman luvun summa on parillinen, ja parillisen ja parittoman luvun summa on pariton. Fibonaccin lukujen parillisuudet muodostavat jonon

pariton, pariton, parillinen, pariton, pariton, parillinen, ...

Jokaisen Fibonaccin luvun parillisuus riippuu vain kahden edellisen Fibonaccin luvun parillisuudesta, ja sen vuoksi parillisuuksien jono toistaa itseään kolmen parillisuuden jaksoissa. Erityisesti, jos n on kolmella jaollinen positiivinen kokonaisluku, niin n. Fibonaccin luku on parillinen.

Luku 2013 on kolmella jaollinen, sillä $2013 = 3\cdot 671$, ja siten 2013. Fibonaccin luku on parillinen.

4. Etsi kaikki luvut x, joille pätee

$$x\cdot(x+1)\cdot(x+2) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\,.$$

Ratkaisu. Todetaan ensiksi, että luvut $x = -1$ ja $x = -2$ ovat halutunlaisia, koska näillä valinnoilla yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin nolla.

Tarkastellaan seuraavaksi niitä arvoja, joille $x \neq 1$ ja $x \neq 2$. Näillä arvoilla yhtälön molemmilla puolilla esiintyvät tekijät $x+1$ ja $x+2$ ovat nollasta poikkeavia, ja ne voi siis jakaa pois. Jäljelle jää yhtälö

$$x = x+3,$$

jolla ei ole lainkaan ratkaisuita koska se sievenee muotoon $0 = 3$.

Täten ainoat halutunlaiset luvut ovat -1 ja -2.