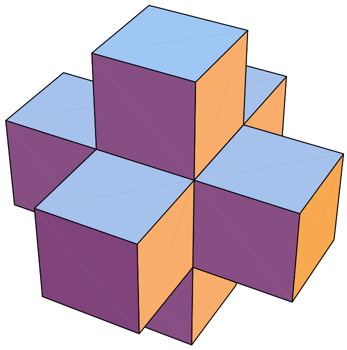
FINAALI TURUSSA

6.4.2013

(1) Erään $1 \times 1 \times 1$-kuution jokaiselle tahkolle liimataan uusi $1 \times 1 \times 1$-kuutio seuraavan kuvan mukaisesti:



Mikä on näin syntyneen kappaleen pinta-ala?

Ratkaisu. Kappaleen kaikki ulkopinnat ovat kuutioiden ulkopintoja. Alkuperäisen kuution pinnasta ei ole näkyvissä mitään. Jokaisesta ulokekuutiosta näkyy täsmälleen viisi sivua, ja ulokkeita on kuusi. Siis kappaleen pinta-ala on $6 \cdot 5 = 30$.

(2) Luvut x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. Tiedämme lisäksi, että

$$\left(5 + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(3 + \frac{y}{2}\right) = 19.$$

Mikä on x?

Ratkaisu. Jos y olisi vähintään kaksi, vasemman puolen lauseke olisi suuruudeltaan vähintään

$$5 \cdot \left(3 + \frac{2}{2}\right) = 5 \cdot 4 = 20,$$

eli se olisi selvästi suurempi kuin 19, ja yhtälö ei voisi päteä. Siis on oltava $y = 1$.

Nyt yhtälön vasen puoli sievenee mukavasti:

$$\left(5 + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5x + 3}{x} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35x + 21}{2x}.$$

Yhtälö sievenee siten muotoon

$$35x + 21 = 2x \cdot 19 = 38x.$$

On siis oltava $3x = 21$ ja edelleen $x = 7$.

Ainoa mahdollinen ratkaisu on täten $x = 7$, $y = 1$. Toisaalta, tämä on ratkaisu, koska

$$\left(5 + \frac{3}{7}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{35 + 3}{7} \cdot \frac{6 + 1}{2} = \frac{38 \cdot 7}{7 \cdot 2} = \frac{38}{2} = 19.$$

(3) Erään 111×111-shakkilaudan keskimmäisessä ruudussa on nappula nimeltä torni. Paremman tekemisen puutteessa torni siirtyy ensin yhden ruudun verran johonkin suuntaan (ylös, alas, oikealle tai vasemmalle). Sitten se siirtyy kaksi ruutua johonkin suuntaan (jälleen ylös, alas, oikealle tai vasemmalle). Ja näin se jatkaa tehden kolmen ruudun pituisen hyppäyksen, neljän ruudun pituisen, ja niin edelleen. Lopulta se siirtyy peräti kymmenen ruutua kerrallaan johonkin suuntaan. Onko mahdollista, että torni on kaiken tämän jälkeen laudan keskimmäisessä ruudussa, mistä se lähti liikkeelle?

Ratkaisu. Jos torni on lopuksi lähtöruudussaan, sen on täytynyt tehdä vaakasuunnassa parillinen määrä parittoman mittaisia siirtoja, ja samoin pystysuunnassa parillinen määrä parittoman mittaisia siirtoja. Tornin on siis täytynyt tehdä parillinen määrä parittoman mittaisia siirtoja. Mutta parittoman mittaisia siirtoja oli viisi: nimittäin 1, 3, 5, 7 ja 9 ruudun mittaiset siirrot. Siis torni ei voi olla lopuksi lähtöruudussaan.

(4) Montako sellaista nelinumeroista lukua on olemassa, joiden numeroiden tulo on 27? (Selvennys: Esimerkiksi luvun 1234 numeroiden tulo on $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

Ratkaisu. Ainoat luvut, joilla 27 on jaollinen, ovat 1, 3, 9 ja 27. Ainoat yksinumeroiset luvut, joilla 27 on jaollinen, ovat siis 1, 3 ja 9. Halutunlaisissa nelinumeroisissa luvuissa voi siis esiintyä vain näitä numeroita.

Jos halutunlaisessa nelinumeroisessa luvussa esiintyy numero 9, niin muiden kolmen numeron tulon on oltava 3, mistä seuraa, että kolmen muun numeron täytyy olla 3, 1 ja 1, jossakin järjestyksessä. Nelinumeroisia lukuja, joissa esiintyy yksi yhdeksikkö, yksi kolmonen ja kaksi ykköstä, on oltava kaksitoista kappaletta: numeron 9 sijainti luvussa voidaan valita neljällä eri tavalla, minkä jälkeen numerolle 3 on kolme eri vaihtoehtoa: yhteensä $4 \cdot 3 = 12$ eri mahdollisuutta. Halutunlaiset luvut, joissa esiintyy numero 9, voi luetella:

$$\begin{array}{llllll} 1139, & 1193, & 1319, & 1391, & 1913, & 1931, \\ 3119, & 3191, & 3911, & 9113, & 9131, & 9311. \end{array}$$

Oletetaan sitten, ettei halutunlaisessa luvussa esiinny numeroa 9. Sen kaikki numerot ovat siis ykkösiä ja kolmosia. Jotta numeroiden tulo olisi 27, kolmosia on oltava täsmälleen kolme kappaletta. Tällaisia lukuja on vain neljä erilaista:

$$1333, \quad 3133, \quad 3313, \quad 3331.$$

Yhteensä halutunlaisia lukuja on siis $12 + 4 = 16$ kappaletta.