Turun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 7.2.2013 Ratkaisuita

1. Kylpyhuoneen seinät ja lattia vesieristetään. Lattian koko on 2×3 metriä ja huoneen korkeus 3 metriä. Yksi purkki eristettä riittää lattian eristämiseen. Kuinka monta purkkia eristettä pitää kaiken kaikkiaan ostaa, kun ainetta myydään vain kokonaisina purkkeina?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Ratkaisu. Lattian eristämiseen menee siis yksi purkki. Kahden kapeamman, 2×3-seinän eristämiseen menee myös yksi purkki kuhunkin, koska ne ovat molemmat yhtä isoja kuin lattia. Isompien 3×3-seinien alat ovat yhteensä $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ neliömetriä, ja koska kuuden neliömetrin eristäminen vaatii yhden purkin, vaativat isot seinät kolme purkkia.

Eristettä tarvitaan siis $1 + 2 + 3 = 6$ purkkia.

2. Perheellä on kolme pientä koiraa, jotka kukin syövät yhden purkin ruokaa päivässä. Lähimarketissa purkin hinta on 5 €, ja siellä on meneillään alennuskampanja, missä seitsemän purkkia ostettuaan kahdeksannen saa kaupan päälle. Perhe ostaa koirilleen kahden viikon ruoat. Kuinka paljon ne maksavat?

a) 150 € b) 165 € c) 185 € d) 190 € e) 280 €

Ratkaisu. Perhe ostaa kolmelle koiralle kullekin yhden purkin ruokaa päivää kohti $2 \cdot 7 = 14$ päiväksi; yhteensä $3 \cdot 14 = 42$ purkkia, siis. Jokaisesta kahdeksasta purkista riittää maksaa $7 \cdot 5\,€ = 35\,€$. Ensimmäiset $40 = 5 \cdot 8$ purkkia siis maksavat $5 \cdot 35\,€ = 175\,€$. Puuttuvat kaksi purkkia maksavat $2 \cdot 5\,€ = 10\,€$.

Yhteensä koirien kahden viikon herkut maksavat siis 185 €.

3. Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo on 157. Mikä on keskimmäinen luvuista?

a) Kyseisenlaisia lukuja ei ole. b) 5 c) 7 d) 9 e) Oikeita vastauksia on useampia.

Ratkaisu. Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta jokin on parillinen, ja siispä kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo on välttämättä myös parillinen. Luku 157 ei ole parillinen, eli tehtävänannon kuvailema tilanne ei ole mahdollinen.

4. Suorakulmaisen kolmion kateettien (eli kahden lyhyemmän sivun) pituudet ovat 3 ja 4. Mikä on sen hypotenuusaa (eli pisintä sivua) vasten piirretyn korkeusjanan pituus?

a) 1,8 b) 2 c) 2,2 d) 2,4 e) 2,6

Ratkaisu. Pythagoraan lauseen nojalla kolmion hypotenuusan pituus on $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Olkoon kysytty korkeusjanan pituus h. Kolmion ala on toisaalta $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ ja toisaalta $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$. Täten $5h = 3 \cdot 4$ ja on oltava $h = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

5. Viiden luvun listan ensimmäinen luku on 111 ja viimeinen 333, ja lisäksi listan minkä tahansa kolmen peräkkäisen luvun summa on 999. Mikä on keskimmäinen luku?

a) 222 b) 333 c) 444 d) 555 e) 666

Ratkaisu. Olkoot listan luvut a, b, c, d ja e. Koska $b + c + d = c + d + e$, on $b = e = 333$. Keskimmäiselle luvulle c pätee siis

$$444 + c = 111 + 333 + c = a + b + c = 999,$$

ja täten $c = 999 - 444 = 555$.

6. Mikä on tulon $111\,111\,111 \cdot 111\,111\,111$ kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa?

a) 17 **b)** 18 **c)** 45 **d)** 80 **e)** 81

Ratkaisu. Kirjoitetaan kyseessä oleva tulo ennakkoluulottomasti allekkainlaskuna:

$$
\begin{array}{rr}
 & 111\,111\,111 \\
\times & 111\,111\,111 \\
\hline
 & 111\,111\,111 \\
 & 1\,111\,111\,11 \\
 & 11\,111\,111\,1 \\
 & 111\,111\,111 \\
 & 1\,111\,111\,11 \\
 & 11\,111\,111\,1 \\
 & 111\,111\,111 \\
 & 1\,111\,111\,11 \\
 & 11\,111\,111\,1 \\
\hline
= & 12\,345\,678\,987\,654\,321
\end{array}
$$

Tämän numeroiden summa on

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 81.$$

7. Pikkuruisen tehtaan tuotantolinjalla tehdään omenasmoothieta, johon kuluu kaksi appelsiinia ja kolme omenaa sekä appelsiinismoothieta, johon kuluu kaksi omenaa ja neljä appelsiinia. Varastossa on 51 appelsiinia ja 43 omenaa. Varasto pyritään kuluttamaan mahdollisimman tarkasti loppuun. Mitä jää jäljelle?

a) ei mitään
b) ainakin yksi appelsiini
c) ainakin kolme appelsiinia
d) appelsiini ja omena
e) kolme appelsiinia ja kolme omenaa

Ratkaisu. Koska jokaiseen smoothieen kuluu parillinen määrä appelsiineja, ja koska appelsiineja on varastossa pariton määrä, jää jäljelle varmasti ainakin yksi appelsiini.

Toisaalta, jos varaston hedelmistä tehdään 8 appelsiini- ja 9 omenasmoothieta, niin appelsiineja kuluu

$$8 \cdot 4 + 9 \cdot 2 = 32 + 18 = 50\,\text{kappaletta}$$

ja omenoita

$$8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 16 + 27 = 43\,\text{kappaletta},$$

ja tällöin jäljelle jää siis vain yksi appelsiini.

8. Jos sovimme, että $a \star b$ tarkoittaa samaa kuin $ab + 1$, niin mitä on

$$(1 \star 2) \star (3 \star 4)\ ?$$

a) 25 **b)** 27 **c)** 35 **d)** 37 **e)** 40

Ratkaisu.

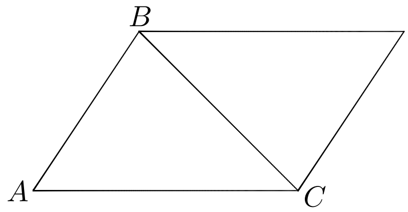
$$
\begin{aligned}
(1 \star 2) \star (3 \star 4) &= (1 \cdot 2 + 1) \star (3 \cdot 4 + 1) = (2+1) \star (12+1) \\
&= 3 \star 13 = 3 \cdot 13 + 1 = 39 + 1 = 40.
\end{aligned}
$$

9. Jos on annettu kolmio $\triangle ABC$ niin kuinka monta sellaista pistettä P on olemassa, että pisteet A, B, C ja P ovat (jossakin järjestyksessä) jonkin suunnikkaan kärjet?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

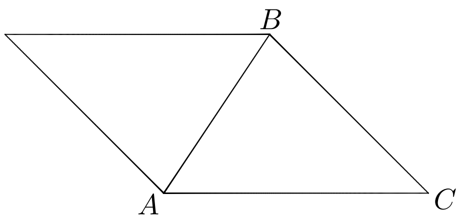
Ratkaisu. Oletetaan, että A, B ja C ovat jonkin suunnikkaan kolme eri kärkeä. Nelikulmion kolmesta kärjestä täsmälleen yksi on kahden muun naapuri.

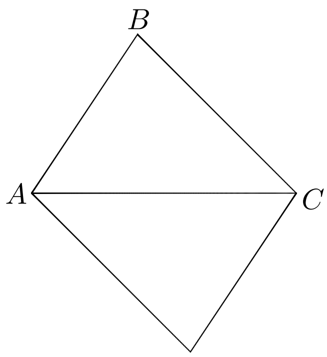
Oletetaan ensin, että A on kärkien B ja C naapuri. Tällöin pisteelle A vastakkaisen kärjen on oltava pisteestä B piirretyn sivun AC suuntaisen suoran, ja pisteestä C piirretyn sivun AB suuntaisen suoran leikkauspisteessä:



Näitä leikkauspisteitä on tasan yksi, ja siis tässä tapauksessa on olemassa täsmälleen yksi tapa täydentää $\triangle ABC$ suunnikkaaksi.

Täysin samalla tavalla niissä tapauksissa, missä piste C on pisteiden A ja B naapuri, tai missä piste B on pisteiden A ja C naapuri, on kummassakin täsmälleen yksi tapa täydentää kolmio $\triangle ABC$ suunnikkaaksi:





Erilaisia tapoja täydentää kolmio $\triangle ABC$ suunnikkaaksi on siis täsmälleen kolme.

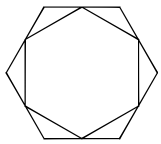
10. Mangusti ravistaa puuta pudottaakseen kookospähkinöitä. Se joutuu ravistamaan viisi minuuttia saadakseen pähkinän putoamaan. Kun ensimmäinen pähkinä kumahtaa maahan, havahtuu laiskiainen ja lähtee varastamaan pähkinöitä. Sillä kestää seitsemän minuuttia möngertää pähkinöiden luo, ja yhtä kauan takaisin pesälleen saaliinsa kanssa. Se kuljettaa vain yhden pähkinän kerrallaan, ja se jatkaa pähkinöiden varastamista kunnes mangusti on lähtenyt saaliinsa kanssa pois. Kuinka kauan mangustilta kestää saada 15 pähkinän varasto?

a) 75 min **b)** 115 min **c)** 145 min **d)** 150 min **e)** 250 min

Ratkaisu. Kun on kulunut 75 minuuttia, mangusti on saanut pudotettua $\frac{75}{5} = 15$ pähkinää, ja laiskiainen on tehnyt $\frac{75-5}{14} = 5$ onnistunutta ryöstöretkeä ja on pesällään. Kun on kulunut 35 minuuttia lisää, mangusti on pudottanut $15 + 7 = 22$ pähkinää, laiskiainen on kähveltänyt $5 + 3 = 8$ ja se on puun luona ja lähdössä takaisin pesälleen. Mangustilla on $22 - 8 = 14$ pähkinää ja siltä menee viisi minuuttia saada vielä yksi pähkinä lisää, ja noiden viiden minuutin aikana laiskiainen ei enään ennätä takaisin puun luo.

Aikaa kuluu yhteensä siis $75 + 35 + 5 = 115$ minuuttia.

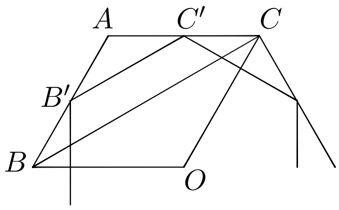
11. Säännöllisen kuusikulmion sivujen keskipisteet yhdistetään ja näin saadaan pienempi kuusikulmio. Kuinka suuri on pienemmän kuusikulmion ala, jos suuremman kuusikulmion ala on 1?



a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{5}{6}$

Ratkaisu. Pienemmän kuusikulmion ala on suuren kuusikulmion ala miinus kuuden kärjissä olevan pienen kolmion alat. Seuraavassa laskemme yksittäisen pienen kolmion alan osuuden ison kuusikulmion alasta.

Ei ole vaikea havaita, että pienen kolmion $\triangle AB'C'$ ala on neljäsosa kolmion $\triangle ABC$ alasta, ja että kolmion $\triangle ABC$ ala puolestaan on puolet nelikulmion $ABOC$ alasta, missä A, B, C, B', C' ja O ovat kuten seuraavassa kuviossa (O on kuusikulmioiden keskipiste):



Todetaan vielä, että nelikulmion $ABOC$ ala on kolmasosa koko ison kuusikulmion alasta. Yhden pienen kolmion ala on siis $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$.

Pienemmän kuusikulmion ala on siis

$$1 - 6 \cdot \frac{1}{24} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

12. Neliölukuja ovat

$$0^2, \quad 1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2, \quad \ldots, \qquad \text{eli} \qquad 0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad \ldots.$$

Mitkä ovat mahdolliset jakojäännökset, kun neliöluku jaetaan seitsemällä?

a) 0 ja 1 **b)** 0, 1 ja 2 **c)** 0, 1 ja 4 **d)** 0, 1, 2 ja 4 **e)** 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6

Ratkaisu. Olkoon n jokin kokonaisluku, ja jaetaan se seitsemällä: sen voi kirjoittaa muodossa $n = 7k + r$, missä k on kokonaisluku ja r on jokin luvuista 0, 1, …, 6. Luvun n neliö on

$$n^2 = (7k + r)^2 = 7^2k^2 + 2 \cdot 7k \cdot r + r^2 = 7(7k^2 + 2k) + r^2.$$

Neliön n^2 jakojäännös seitsemällä jaettaessa on siis sama kuin luvun r^2. Mahdolliset neliön r^2 arvot ovat

$$0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad \text{ja} \quad 36.$$

Näiden jakojäännökset seitsemällä jaettaessa ovat 0, 1, 4, 2, 2, 4 ja 1.

13. Kuinka monta on olemassa sellaisia nelikulmioita, joissa minkä tahansa kolmen kulman summa on pienempi kuin 270°?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** vähintään neljä

Ratkaisu. Oletetaan, että kyseisenlainen nelikulmio on olemassa, ja merkitään sen kulmia kirjaimilla α, β, γ ja δ. Koska nelikulmion kulmien summa on 360°, on $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Nyt oletuksesta seuraa, että

$$\begin{aligned}
1080° &= 3 \cdot 360° = 3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 3\delta \\
&= (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma + \delta) + (\gamma + \delta + \alpha) + (\delta + \alpha + \beta) \\
&< 270° + 270° + 270° + 270° = 1080°,
\end{aligned}$$

mikä on mahdotonta.