Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 22.1.2014
Ratkaisuita

1. Laske $123 \cdot 45$.

a) 4000 **b)** 4525 **c)** 4535 **d)** 5525 **e)** 5535

Ratkaisu. Lasketaan allekkain:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot 123 \\ \hline 135 \\ 90 \\ 45 \\ \hline 5535 \end{array}$$

2. Yhden maalipurkin sisällöllä voi maalata $2\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$-kokoisen alan. Keittiön seinät, katto ja lattia päätetään maalata. Keittiön korkeus on $2{,}5\,\mathrm{m}$, ja lattian mitat $4\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m}$. Keittiön ovea ($1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$) ei maalata, kuten ei myöskään ikkunaa ($1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$). Maali ostetaan kokonaisissa purkeissa. Kuinka monta purkkia maalia on ostettava, jotta keittiö saadaan maalattua?

a) 11 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 15

Ratkaisu. Maalattavaa on yhteensä

$$2 \cdot (2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{m} + 2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m}) - 1\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 82\,\mathrm{m}^2.$$

Maalipurkeiksi muutettuna tämä on

$$\frac{82}{6} \approx 13{,}7.$$

Koska maali on ostettava kokonaisissa purkeissa, tarvitaan 14 purkkia.

3. Laske $2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \cdots + 98 - 100$.

a) -50 **b)** -2 **c)** -1 **d)** 0 **e)** 50

Ratkaisu. Yhdistetään termit:

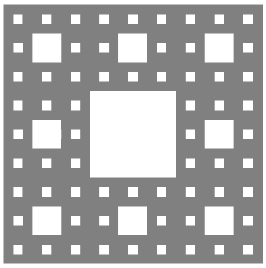
$$\begin{aligned} &2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \cdots + 98 - 100 \\ &\qquad = (2-4) + (6-8) + (10-12) + \cdots + (98-100) \\ &\qquad = -2 - 2 - 2 - \cdots - 2 = -2 \cdot 25 = -50. \end{aligned}$$

4. Eräällä saarella on 200 asukasta. Osa asukkaista kuluttaa 2 kg ja loput 1 kg teetä vuodessa henkilöä kohden. Jos vuodessa kuluu 300 kg teetä, kuinka moni asukas kuluttaa 2 kg teetä vuodessa?

a) 0 **b)** 20 **c)** 50 **d)** 70 **e)** 100

Ratkaisu. Merkitään 2 kg teetä vuodessa kuluttavien henkilöiden lukumäärää kirjaimella x. Koska yhteensä henkilöitä on 200, on 1 kg teetä käyttäviä $200 - x$ yksilöä. Nyt teen kulutus on $x \cdot 2 + (200 - x) \cdot 1 = 300$ kilogrammaa vuodessa. Tämä yhtälö sievenee ensin muotoon $2x + 200 - x = 300$, ja lopuksi muotoon $x = 100$.

5. 27×27-neliö jaettiin yhtä suuriksi 9×9-neliöiksi, joista keskimmäinen leikattiin pois. Jäljelle jääneistä 9×9-neliöistä jokainen jaettiin 3×3-neliöiksi, joista keskimmäinen aina leikattiin pois. Lopuksi, jäljelle jääneistä pienistä neliöistä jokainen vielä jaettiin 1×1-neliöiksi, joista keskimmäinen aina leikattiin pois. Jäljelle jäi tämän muotoinen alue:



Mikä on jäljelle jääneen osan (eli kuvan tumman alueen) ala, kun alkuperäisen 27×27-neliön ala oli $27 \cdot 27 = 729$?

a) 243 **b)** 444 **c)** 512 **d)** 586 **e)** 648

Ratkaisu. Kussakin vaiheessa jäljellä olevasta alasta poistettiin yhdeksäsosa. Siispä, kaikkien kolmen ruudukointi- ja poisto-operaatioiden jälkeen koko ala oli

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot 27 \cdot 27 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512.$$

6. Mikä seuraavista lukukolmikoista a, b, c on sellainen, että ei ole olemassa kolmiota, jonka sivujen pituudet olisivat a, b ja c?

a) $1, 2, 3$ **b)** $2, 3, 4$ **c)** $3, 4, 5$ **d)** $10, 15, 20$ **e)** $100, 100, 150$

Ratkaisu. Kolmiossa kahden lyhyemmän sivun pituuksien summa on pidempi kuin pisin sivu. Näin ollen 1, 2, 3 ei muodosta kolmiota, koska $1 + 2 = 3$. Muut kohdat toteuttavat ehdon, sillä

b) $2 + 3 > 4$ c) $3 + 4 > 5$ d) $10 + 15 > 20$ ja e) $100 + 100 > 150$.

7. Olkoon x jokin luku, josta tiedetään, että $-100 \leqslant x \leqslant 100$. Mitä voidaan sanoa varmasti?

a) $2 \cdot x$ on suurempi kuin x
b) $x \cdot x$ on suurempi kuin x
c) x on suurempi kuin luku 1
d) $x \cdot x$ on vähintään nolla
e) $2 \cdot x$ on korkeintaan 100.

Ratkaisu. Oikea vaihtoehto on d), sillä jos x on positiivinen, on se kerrottuna itsellään myös positiivinen. Jos taas x on nolla, on se kerrottuna itsellään nolla. Jos se taas on negatiivinen, on se kerrottuna itsellään positiivinen.

Muiden vaihtoehtojen vastaesimerkit:
a) Jos $x = -1$, niin $2 \cdot x = -2$, joka ei ole suurempi kuin $x = -1$.
b) Jos $x = 0{,}1$, niin $x \cdot x = 0{,}01$, joka ei ole suurempi kuin $x = 0{,}1$.
c) Jos $x = -2$, ei se ole suurempi kuin luku 1.
d) Pitää paikkansa.
e) Jos $x = 75$, ei $2 \cdot x = 150$ ole korkeintaan 100.

8. Suorakulmaisessa kolmiossa lyhimmän sivun pituus on 5 ja pisimmän sivun pituus 13. Mikä on kolmion kolmannen sivun pituus?

a) 11 **b)** $\sqrt{124}$ **c)** $\sqrt{134}$ **d)** 12 **e)** $\sqrt{154}$

Ratkaisu. Olkoon kolmion kateetit $a = 5$ ja b, ja olkoon kolmion hypotenuusa $c = 13$. Pythagoraan lauseen nojalla

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

eli

$$5^2 + b^2 = 13^2.$$

Tästä seuraa, että

$$b^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144,$$

ja koska $12^2 = 144$, on kysytty sivun pituus $b = 12$.

9. Ville ja Kalle pelasivat seuraavaa peliä. Pelissä pojat yrittävät vuorotellen kaataa keiloja vierittämällä pallon niitä kohti. Keiloja on 4 kappaletta rivissä. Pojat olivat kehittyneet taitaviksi, ja osuivat pallolla varmasti keiloihin siten, että pallo kaatoi joko yhden heittäjän valitseman keilan, tai kaksi heittäjän valitsemaa vierekkäistä keilaa. Jos ei vuorollaan pystynyt kaatamaan yhtään keilaa, niin hävisi pelin. Näin ollen viimeisen keilan vuorollaan kaatanut voitti automaattisesti. Nyt oli Villen vuoro aloittaa. Mikä keila tai mitä keiloja hänen kannatti kaataa avausheitollaan?

a) Jompi kumpi kahdesta keskimmäisestä keilasta
b) jompi kumpi rivin päässä seisovista keiloista
c) rivin kaksi keskimmäistä keilaa; vai
d) kaksi vierekkäistä keilaa rivin jommasta kummasta päästä?

Ratkaisu. Numeroikaamme keilat vasemmalta oikealle 1, 2, 3 ja 4. Käydään kaikki tarjotut vaihtoehdot läpi.

a) Jos Ville kaataa toisen keskimmäisistä keiloista, sanokaamme keilan 2, niin Kalle voi kaataa keilan 4, Villen täytyy silloin kaataa jompi kumpi keiloista 1 ja 3, jättäen Kallelle viimeiseksi keilaksi keilan 3 tai 1, jolloin Kalle voittaa.

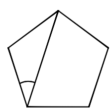
b) Jos Ville kaataa päätykeilan, sanokaamme keilan 1, niin Kalle voi kaataa keilan 3, jolloin Villen on seuraavaksi kaadettava jompi kumpi keiloista 2 ja 4, jättäen Kallelle taas vain yhden keilan kaadettavaksi, ja Kalle voittaa.

c) Jos Ville kaataa kaksi keskimmäistä keilaa, niin Kallelle jää vaihtoehdoiksi vain keilat 1 ja 4, joita hän ei voi kaataa kerralla. Kun Kalle on kaatanut toisen niistä, voi Ville vain kaataa viimeisen jäljelle jääneen keilan ja hän voittaa.

d) Lopuksi, jos Ville kaataa keilat 1 ja 2 (tai keilat 3 ja 4), niin Kalle voi kaataa keilat 3 ja 4 (tai keilat 1 ja 2), jolloin Kalle voittaa.

Siis ainoa Villen varmaan voittoon vievä tie on vaihtoehto c).

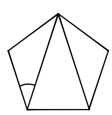
10. Seuraavassa kuviossa on säännöllinen viisikulmio.



Kuinka suuri on kuvaan merkitty kulma?

a) 34° **b)** 35° **c)** 36° **d)** 37° **e)** 38°

Ratkaisu. Jos piirretään toinenkin lävistäjä, niin viisikulmio jakautuu kolmeksi kolmioksi:



Erityisesti, viisikulmion kulmien summa on nyt sama kuin kaikkien kolmen kolmion kulmien summa, ja koska kolmion kulmien summa on 180°, on viisikulmion kulmien summa $3 \cdot 180° = 540°$. Koska kyseessä on säännöllinen viisikulmio, on yhden kulman suuruus viidesosa tästä, eli 108°.

Todetaan seuraavaksi, että alkuperäisessä kuvassa piirretty lävistäjä erottaa viisikulmiosta tasakylkisen kolmion, jonka toinen kantakulma merkitty kulma on. Koska kolmion kulmien summa on 180° ja huippukulma 108°, on kysytty kantakulma

$$\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ.$$

11. Pyöräilijä päättää ajaa joka toisen kilometrin nopeudella 30 km/h ja joka toisen kilometrin nopeudella 20 km/h. Kuinka monta kilometriä hän etenee tunnissa?

a) 18 km **b)** 24 km **c)** 25 km **d)** 26 km **e)** 28 km

Ratkaisu. Nopeudella 30 km/h kilometriin menee 2 minuuttia ja nopeudella 20 km/h kilometriin menee 3 minuuttia. Viidessä minuutissa hän siis etenee aina kaksi kilometriä. Täten tunnissa menee 24 kilometriä.

12. Positiivisille kokonaisluvuille a ja b pätee

$$\frac{a+b}{2a+3b} = \frac{3}{8}.$$

Mitä silloin on $\frac{a}{b}$?

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Ratkaisu. Ensinnäkin

$$\frac{3}{8} = \frac{a+b}{2a+3b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{2\cdot\frac{a}{b}+3},$$

eli

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{3}{8}\left(2\cdot\frac{a}{b}+3\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{b} + \frac{9}{8}.$$

Tästä seuraa edelleen, että

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b} - \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{b} = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8},$$

ja lopuksi, että

$$\frac{a}{b} = 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

13. Mikä seuraavista kahden murtoluvun summista on suurin?

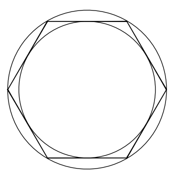
a) $\frac{1}{11}+\frac{1}{19}$ **b)** $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$ **c)** $\frac{1}{13}+\frac{1}{17}$ **d)** $\frac{1}{14}+\frac{1}{16}$ **e)** $\frac{1}{15}+\frac{1}{15}$

Ratkaisu. Kaikissa tarjolla olevissa summissa $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ osoittaja $a+b = 30$, eli niissä $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{30}{ab}$. Kysymys kuuluu siis, missä summista tulo ab on pienin? Tulot ovat

$$11\cdot 19 = 209,\quad 12\cdot 18 = 216,\quad 13\cdot 17 = 221,\quad 14\cdot 16 = 224,\quad \text{ja}\quad 15\cdot 15 = 225.$$

Ensimmäisessä summassa nimittäjien tulo on pienin, eli se on summista suurin.

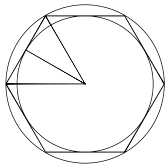
14. Seuraavassa kuvassa on ympyrä, jonka sisällä on säännöllinen kuusikulmio, jonka kärjet ovat ympyrän kehällä. Lisäksi kuusikulmion sisällä on ympyrä, joka sivuaa kutakin kuusikulmion sivuista.



Mikä on isomman ja pienemmän ympyrän alojen suhde?

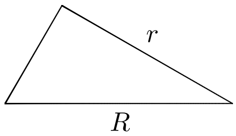
a) $\frac{6}{5}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** 2

Ratkaisu. Piirretään ensin janat kuvion keskipisteeseen kahdesta kuusikulmion kärjestä, ja lisäksi pienemmän ympyrän säde sivuamispisteeseen kuusikulmion kanssa.



Näin syntyy tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus R on samalla myös isomman ympyrän säde. Piirretty pienemmän ympyrän säde, jonka pituus olkoon r, on samalla myös tasasivuisen kolmion korkeusjana.

Nyt säteet, joiden pituudet ovat R ja r ovat suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja toinen kateetti:



Lisäksi, koska tämä kolmio on puolet tasasivuisesta kolmiosta, on kulma vasemmassa alanurkassa $60°$, eli kyseessä on muistikolmio, jonka kulmat ovat $30°$, $60°$ ja $90°$. Tällaisessa kolmiossa keskimmäinen sivu on $\sqrt{3}$ kertaa niin pitkä kuin lyhin sivu, ja pisin sivu on 2 kertaa niin pitkä kuin lyhin sivu. Siten

$$R = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Lopuksi, kun kuvion mittakaava α-kertaistuu, niin ala α^2-kertaistuu. Koska isomman ympyrän säde on $\frac{2}{\sqrt{3}}$ kertaa pienemmän ympyrän säde, isomman ympyrän alan on oltava $\frac{4}{3}$ kertaa pienemmän ympyrän ala.