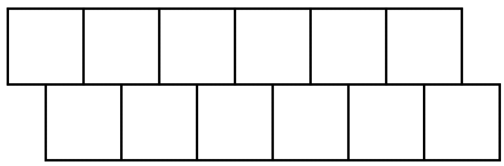
Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 29.2–4.3.2016
Ratkaisuita

1. Laske $1379 + 2480 - 3576$.

$\boxed{\textbf{a)}\ 283}$ **b)** 289 **c)** 353 **d)** 495 **e)** 603

Ratkaisu. Suoraan laskemalla $1379 + 2480 - 3576 = 3859 - 3576 = 283$.

2. Oheinen kuvio väritetään kolmella värillä niin, että jokainen ruutu väritetään täsmälleen yhdellä värillä, ja mikäli kahdella ruudulla on yhtään yhteistä sivua, ei niitä saa värittää samalla värillä. Montako väritysvaihtoehtoa on?



a) 1 **b)** 2 **c)** 3 $\boxed{\textbf{d)}\ 6}$ **e)** 30

Ratkaisu. Väritetään ensin vasemman puolen yläkulman ruutu jollakin kolmesta eri väristä. Tämän voi tehdä kolmella eri tavalla. Sen oikealla puolella olevan ruudun voi värittää nyt kahdella eri tavalla. Mutta nyt ei ole vaikea havaita, että kaikki muut värit määräytyvätkin yksikäsitteisesti jo tehdyistä valinnoista. Siten eri väritystapoja on $3 \cdot 2 = 6$ erilaista.

3. Kala painaa 2 kg plus kolmanneksen itsensä painosta. Montako kiloa kala painaa?

a) $\frac{7}{3}$ kg **b)** $\frac{8}{3}$ kg $\boxed{\textbf{c)}\ 3\,\text{kg}}$ **d)** 3,5 kg **e)** 4 kg

Ratkaisu. Jos kalan paino kilogrammoissa on p, niin $p = 2 + p/3$, josta ensiksi $3p = 6 + p$, sitten $2p = 6$ ja lopulta $p = 3$.

4. Mikä seuraavista väittämistä pitää paikkansa? Luku 2016 on jaollinen luvuilla

a) 2, 6 ja 11 **b)** 3, 5 ja 12 $\boxed{\textbf{c)}\ 4, 9 \text{ ja } 14}$ **d)** 2, 7 ja 13 **e)** Ei mikään edellisistä.

Ratkaisu. Luku 2016 voidaan kirjoittaa muodossa $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Siis 5, 11 ja 13 eivät jaa lukua 2016. Toisaalta luvut 4, 9 ja 14 jakavat luvun 2016. Siis oikea vastaus on c.

5. Kahden tuntemattoman luvun summa on 24 ja niiden erotus on 2. Mikä on niiden tulo?

a) 111 **b)** 112 $\boxed{\textbf{c)}\ 143}$ **d)** 155 **e)** 156

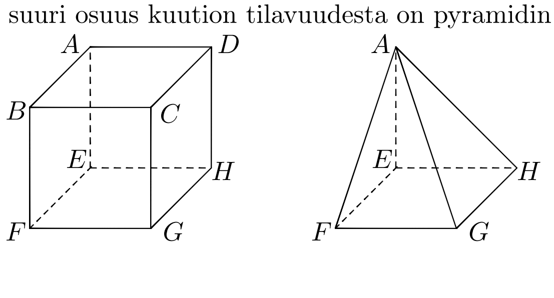
Ratkaisu. Olkoot luvut a ja b niin, että $a+b = 24$ ja $a-b = 2$. Tällöin $26 = 24+2 = a+b+a-b = 2a$, eli $a = 13$ ja $b = a - 2 = 11$. Lukujen tulo on siis $ab = 13 \cdot 11 = 143$.

6. Laske $(a + b)^2 - (a - b)^2$, kun $a = 22$ ja $b = 10$. Tässä x^2 tarkoittaa tietenkin tuloa $x \cdot x$.

a) 480 **b)** 580 **c)** 680 $\boxed{\textbf{d)}\ 880}$ **e)** 1080

Ratkaisu. Suoralla laskulla $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab = 4ab = 4 \cdot 22 \cdot 10 = 880$.

7. Vasemmanpuoleisessa kuvassa on kuutio $ABCDEFGH$ ja oikeanpuoleisessa kuviossa on pyramidi $AEFGH$. Kuinka suuri osuus kuution tilavuudesta on pyramidin sisällä?



a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{d) } \frac{1}{3}}$ e) $\frac{1}{4}$

Ratkaisu. On helppo tarkistaa, että kuutio koostuu kolmesta samanlaisesta pyramidista $AEFGH$, $ABFGC$ ja $ADCGH$. Vastauksen on siis oltava $1/3$.

8. Aino ja Oona tekevät koetta. Ainolla kuluu kunkin tehtävän ratkaisemiseen 4 minuuttia ja Oonalla vain 1 minuutti. Oona ottaa kesken kokeen tunnin nokoset. Aino ja Oona saavat kokeen valmiiksi täsmälleen yhtä aikaa. Kuinka monta tehtävää kokeessa on?

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 $\boxed{\text{e) } 20}$

Ratkaisu. Jos Aino ja Oona tekevät koetta m minuuttia, niin tehtävien lukumäärä on $m/4$. Oona tekee koetta $m - 60$ minuuttia, joten hän tekee $m - 60$ tehtävää. Siis $m/4 = m - 60$, josta $m = \frac{60\cdot 4}{3} = 80$. Tehtäviä kokeessa oli siis $80/4 = 20$ kappaletta.

9. Korissa on kymmenen punaista ja kymmenen vihreää omenaa. Vihreät omenat ovat kaikki keskenään samanlaisia, ja samoin punaiset omenat ovat keskenään kaikki samanlaisia. A ja B jakavat omenat keskenään seuraavien ehtojen mukaan:

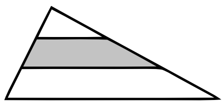
- Kumpikin saa vähintään yhden punaisen ja yhden vihreän omenan.
- A saa enemmän punaisia omenoita kuin B.
- B saa enemmän vihreitä omenoita kuin A.
- Koriin ei jää enää yhtään omenaa, kun A ja B ovat jakaneet ne.

Kuinka monella eri tavalla A ja B voivat jakaa omenat?

a) 1 b) 4 c) 12 $\boxed{\text{d) } 16}$ e) 25

Ratkaisu. Kun A saa jonkin määrän punaisia ja vihreitä omenoita, määräytyy yksikäsitteisesti, kuinka monta punaista ja vihreää omenaa B saa. A voi saada 6, 7, 8 tai 9 punaista omenaa ja 1, 2, 3 tai 4 vihreää omenaa. (Tällöin siis B saa 4, 3, 2 tai 1 punaista omenaa ja 9, 8, 7 tai 6 vihreää omenaa.) Erilaisia tapoja jakaa omenat on siis $4 \cdot 4 = 16$.

10. Kuvan kolmiossa vaakaviivat jakavat kolmion kaksi sivua kummatkin kolmeen yhtä pitkään osaan. Kuinka suuri osa kuviosta on väritetty?



a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{4}{9}$ $\boxed{\text{e) } \frac{1}{3}}$

Ratkaisu. Olkoon kuvion ylimmän pienen värittämättömän kolmion ala A, ja väritetyn alueen ala B. Koko kuvio on samanmuotoinen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat kolminkertaiset. Siispä koko kuvion ala on $9A$. Toisaalta pieni kolmio ja väritetty alue yhdessä muodostavat samanmuotoisen kolmion, jonka sivujen pituudet ovat kaksinkertaiset, eli $A + B = 4A$. Tästä $B = 3A$, ja kuviosta on väritetty $3/9 = 1/3$.

11. Tiedämme, että yksi iso punnus painaa enemmän kuin kaksi pientä punnusta. Tiedämme myös, että seitsemän pientä punnusta painaa enemmän kuin kaksi isoa punnusta. Lisäksi tiedetään, että jokin seuraavista väitteistä pitää paikkaansa. Mikä niistä?

a) Kolme isoa punnusta painaa yhtä paljon kuin yksi pieni.
b) Kolme isoa punnusta painaa yhtä paljon kuin 12 pientä.
$\boxed{\text{c) Yksi iso punnus painaa yhtä paljon kuin kolme pientä.}}$
d) Kolme isoa punnusta painaa yhtä paljon kuin kuusi pientä.
e) Yksi iso ja yksi pieni punnus painavat yhtä paljon kuin kaksi pientä ja yksi iso.

Ratkaisu. Olkoon yhden ison punnuksen paino I ja yhden pienen punnuksen paino p. Tiedämme siis, että $I > 2p$ ja että $2I < 7p$. Koska nyt $3I > 6p > p$, eivät vaihtoehdot a) ja d) ole mahdollisia. Vaihtoehto e) puolestaan on selvästi mahdoton, koska varmasti yksi iso ja kaksi pientä punnusta painavat enemmän kuin yksi iso ja yksi pieni punnus. Lopuksi, $12p > 12 \cdot 2I/7 = 24I/7 > 21I/7 = 3I$, eli vaihtoehto b) ei myöskään ole mahdollinen.

Täten ainoastaan vaihtoehto c) on mahdollinen, ja se toteutuukin silloin kun yksi iso punnus painaa yhtä paljon kuin kolme pientä, eli kun $I = 3p$.

12. Ensimmäiselle riville kirjoitetaan vain luku 1. Toiselle riville kirjoitetaan luvut 2, 3 ja 4 niin, että keskimmäinen luku 3 tulee luvun 1 alle. Edelleen kolmannelle riville kirjoitetaan luvut 5, 6, 7, 8 ja 9 niin, että keskimmäinen luku 7 tulee lukujen 1 ja 3 alle. Näin jatkamalla syntyy seuraavanlainen kuvio:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Mikä on näin muodostetussa kuviossa kymmenennen rivin vasemmanpuoleisin luku?

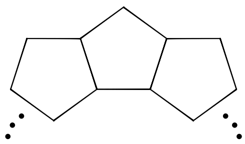
a) 81 $\boxed{\textbf{b)}\ 82}$ **c)** 99 **d)** 100 **e)** 101

Ratkaisu. Osoittautuu, että n. rivin oikeanpuoleisin luku on aina n^2. Eräs tapa vakuuttua tästä on siirtää kullakin rivillä olevia lukuja hieman ja "taittaa" rivi sitten seuraavalla tavalla:

$$1 \qquad \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 3 & 8 & 15 \\ 5 & 6 & 7 & 14 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \qquad \cdots$$

Tiedämme siis, että yhdeksännen rivin oikeanpuoleisin luku on $9^2 = 81$. Kymmenennen rivin ensimmäisen luvun on siis oltava $9^2 + 1 = 82$.

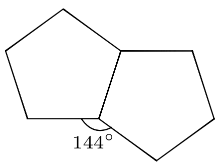
13. Säännöllisen viisikulmion muotoisia laattoja laitetaan kuvan muotoisesti vierekkäin kehään:



Kuinka monta laattaa kehässä on?

a) 8 **b)** 9 $\boxed{\textbf{c)}\ 10}$ **d)** 12 **e)** 15

Ratkaisu. Aloitetaan tarkastelemalla syntyviä kulmia. Viisikulmion voi jakaa kahdella lävistäjällä kolmeksi kolmioksi, ja viisikulmion kulmien summa on näiden kolmen kolmion kulmien summa, eli $3 \cdot 180° = 540°$. Yksi viisikulmion kulma on siis $540°/5 = 108°$. Kehän sisäpuolen reunan yksi kulma on siis suuruudeltaan $360° - 2 \cdot 108° = 360° - 216° = 144°$.



Olkoon viisikulmioiden reunustama alue N-kulmio. Kyseisen N-kulmion voi jakaa $N-2$ kolmioksi, eli N-kulmion kulmien summa on $(N-2) \cdot 180°$. Koska N-kulmiomme on säännöllinen, on sen yhden kulman suuruus $180° \cdot (N-2)/N$.

Voimme siis ratkaista luvun N yhtälöstä

$$180° \cdot \frac{N-2}{N} = 144°.$$

Tämän voi kirjoittaa myös muodossa

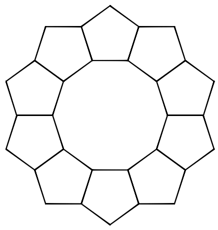
$$1-\frac{2}{N}=\frac{144^\circ}{180^\circ}=\frac{72}{90}=\frac{36}{45}=\frac{12}{15}.$$

Mutta nyt siis

$$\frac{2}{N}=1-\frac{12}{15}=\frac{15}{15}-\frac{12}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=\frac{2}{10},$$

eli voi olla vain $N=10$.

Viisikulmioiden muodostama kuvio näyttää tältä:



14. Montako sellaista nelinumeroista positiivista kokonaislukua (eli kokonaislukua väliltä 1000–9999) on olemassa, joiden numeroiden summa on parillinen?

a) 2250 **b)** 4499 **c)** 4500 **d)** 5000 **e)** 5001

Ratkaisu. Jos N on parillinen luku, niin luku $N+1$ eroaa luvusta N vain viimeisen numeronsa osalta, joka on eri parillisuutta. Eli luvuista N ja $N+1$ on täsmälleen yhden numeroiden summa parillinen. Luvut 1000–9999 jakautuvat mukavasti tällaisiksi pareiksi 1000 ja 1001, 1002 ja 1003, ..., sekä 9998 ja 9999, ja siis täsmälleen puolet luvuista 1000–9999 ovat halutunlaisia, täten halutunlaisia lukuja 4500 kappaletta.

15. Laske osamäärä

$$\frac{1^4+100^4+101^4}{1^2+100^2+101^2}.$$

a) 5050 **b)** 5051 **c)** 10001 **d)** 10101 **e)** 20202.

Ratkaisu. Kirjoitetaan $a=100$. Tällöin lauseke muuttuu muotoon

$$\frac{1+a^4+(a+1)^4}{1+a^2+(a+1)^2}=\frac{1+a^4+a^4+4a^3+6a^2+4a+1}{1+a^2+a^2+2a+1}$$
$$=\frac{2+4a+6a^2+4a^3+2a^4}{2+2a+2a^2}=\frac{1+2a+3a^2+2a^3+a^4}{1+a+a^2}.$$

Mutta koska

$$\left(1+a+a^2\right)\left(1+a+a^2\right)=1+a+a^2+a+a^2+a^3+a^2+a^3+a^4=1+2a+3a^2+2a^3+a^4,$$

on siis

$$\frac{1^4+100^4+101^4}{1^2+100^2+101^2}=\frac{1+2a+3a^2+2a^3+a^4}{1+a+a^2}=1+a+a^2=1+100+100^2=10101.$$