Oulun seudun 7-luokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 23.4.2016 Ratkaisuja

1. Pascalin kolmio määritellään seuraavasti. Ensimmäisellä rivillä on vain luku 1 ja toisella rivillä kaksi ykköstä. Uusi rivi on aina yhden pidempi kuin edellinen rivi. Rivi muodostetaan kirjoittamalla rivin päihin ykköset hieman edellisen rivin reunoja ulommas. Muut rivin jäsenet saadaan kirjoittamalla aina edellisen rivin kahden vierekkäisen luvun alle niiden summa. Rivejä Pascalin kolmiossa on äärettömän monta.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}
$$

....

Kuinka monta kertaa luku 10 esiintyy Pascalin kolmiossa?

Ratkaisu. Alku Pascalin kolmiosta näyttää seuraavalta.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1 \\
\end{array}
$$

....

Tästä eteenpäin reunaykkösiä lukuunottamatta kaikki luvut ovat kymmentä suurempia. Siispä luku 10 esiintyy neljä kertaa.

2. Matti, Heta, Juha, Oona, Reetta ja Teemu kokoontuvat joka tiistai matematiikkakerhoon. Kerho kokoontuu pyöreään pöytään, jonka ympärillä on kuusi tuolia. Matti istuu aina samalla paikalla. Heta haluaa istua Matin vieressä. Oona ja Reetta eivät tule toimeen, eivätkä siten halua istua vierekkäin. Monellako eri tavalla oppilaat voivat asettua pöytään?

Ratkaisu. Matti istuu omalle paikalleen. Heta istuu Matin viereen, joten Hetan istumapaikalle on 2 vaihtoehtoa. Oona ja Reetta asettuvat neljälle jäljelläolevalle paikalle siten, että he eivät istu vierekkäin. Paikat voivat olla RxOx, RxxO, xRxO, OxRx, OxxR, xOxR. Vaihtoehtoja Oonalle ja Reetalle on siis 6. Juha ja Teemu voivat istua viimeisille kahdelle paikalle kummin päin tahansa, joten heille jää 2 vaihtoehtoa. Yhteensä erilaisia istumajärjestyksiä on siten $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$.

3. Taavetti löytää merkillisen hilavitkuttimen kirpputorilta. Siinä on punainen, sininen ja keltainen nappi sekä pyörä. Myyjä kertoo, että jokainen nappi vastaa jotain lukua $1, 2, 3, 4, \cdots$. Keltaisen napin hän muistaa vastaavan lukua 7. Sinisestä ja punaisesta hän ei osaa sanoa mitään. Napit toimivat niin, että jos nappia painaa kerran, pyörähtää pyörä yhtä monta kierrosta kuin on napin arvo. Jos nappia painaa nopeasti kaksi kertaa peräkkäin, pyörähtää pyörä niin monta kierrosta kuin on napin arvo itsellään kerrottuna. Keltaista kerran painamalla kiekko siis pyörähtää 7 kierrosta ja kahdella nopealla painalluksella 49 kierrosta. Taavetti painaa kerran punaista ja kerran sinistä nappia. Pyörä pyörähtää 5 kierrosta. Sitten taavetti painaa sinistä nopeasti kahdesti ja punaista kerran. Pyörä pyörähtää 11 kierrosta.

Mitä ovat punaisen ja sinisen napin arvot?

Ratkaisu. Jos s on sinisen napin arvo ja p punaisen napin arvo, niin

$$\begin{cases} p + s = 5, \\ s^2 + p = 11. \end{cases}$$

Koska $1 \leqslant p$, $1 \leqslant s$ ja $p + s = 5$, on $1 \leqslant p \leqslant 4$ ja $1 \leqslant s \leqslant 4$. Kokeillaan eri vaihtoehdot läpi:

Jos $s = 1$, niin $p = 5 - 1 = 4$, jolloin $s^2 + p = 5$, mikä ei käy.
Jos $s = 2$, niin $p = 5 - 2 = 3$, jolloin $s^2 + p = 7$, mikä ei käy.
Jos $s = 3$, niin $p = 5 - 3 = 2$, jolloin $s^2 + p = 11$, joten tämä on ratkaisu.
Jos $s = 4$, niin $p = 5 - 4 = 1$, jolloin $s^2 + p = 17$, mikä ei käy.

Muita ratkaisuja ei siis ole.

4. Huoneessa on 25 hehkulamppua numeroituna yhdestä kahteenkymmeneenviiteen. Jokaisessa lampussa on katkaisija, jota kerran painamalla lamppu syttyy ja uudestaan painamalla taas sammuu. Lamput ovat aluksi kaikki pois päältä. Painetaan ensin jokaista katkaisijaa, jonka numero on jaollinen yhdellä $(1, 2, 3, \ldots, 25)$. Sitten jokaista, jonka numero on jaollinen kahdella $(2, 4, 6, \ldots, 24)$, sitten kolmella jaolliset ja niin edespäin aina 25:llä jaollisiin asti.

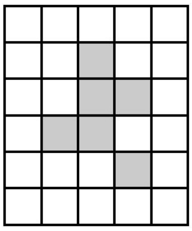
Mitkä lampuista ovat lopuksi päällä ja miksi?

Ratkaisu. Lamppu on lopussa päällä, jos sen katkaisijaa on painettu pariton määrä kertoja. Katkaisijaa painetaan luvun jokaisen tekijän kohdalla, eli lamppu on päällä, mikäli sillä on pariton määrä tekijöitä. Käydään luvut läpi ja huomataan, että lopussa päällä ovat lamput $1, 4, 9, 16$ ja 25. Huomataan, että päällä olevat lamput vastaavat neliölukuja.

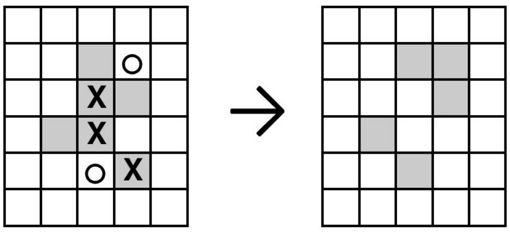
5. Pelataan Game of Life -nimistä yksinpeliä ruutupaperilla. Kunkin ruudun ympärillä olevia kahdeksaa lähintä ruutua kutsutaan ruudun naapureiksi. Alussa joissakin ruuduista on elävä solu. Kullakin vuorolla solut voivat pysyä elossa, niitä voi tuhoutua ja niitä voi syntyä lisää tyhjiin ruutuihin. Tämä tapahtuu seuraavien sääntöjen mukaisesti:

1. Jos solulla on tasan kaksi tai kolme naapurisolua, se pysyy hengissä.
2. Jos solulla on yksi tai ei yhtään naapurisolua, se tuhoutuu.
3. Jos solulla on enemmän kuin kolme naapurisolua, se tuhoutuu.
4. Jos tyhjällä ruudulla on täsmälleen kolme naapurisolua, syntyy ruutuun uusi solu.

Yllämainittujen sääntöjen mukaiset syntymät ja tuhoutumiset tapahtuvat samanaikaisesti.
Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa solumuodostelmaa:

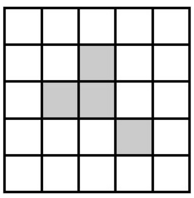


Yhden vuoron aikana solumuodostelmalle tapahtuu seuraavaa:



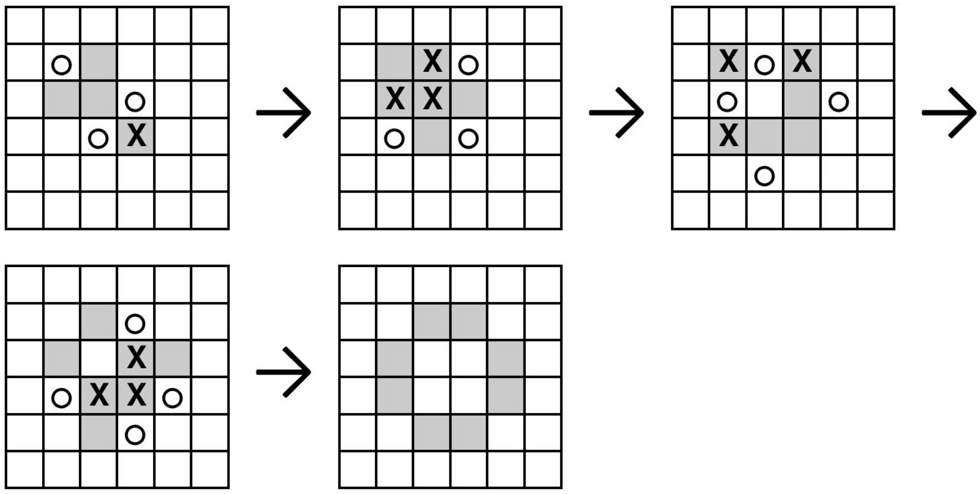
Harmaat ruudut tarkoittavat eläviä soluja. Rasti merkitsee, että solu tuhoutuu ja pieni pallo merkitsee uuden solun syntymää.

a) Miltä allaoleva solumuodostelma näyttää kahden vuoron jälkeen? Entä sadan?



b) Keksi sellainen solumuodostelma, joka tuhoutuu kokonaan täsmälleen neljässä vuorossa.

Ratkaisu. Allaolevassa kuvassa näkyy kohdan a) kuvion ensimmäiset neljä vuoroa. Näiden jälkeen kuvio pysyy muuttumattomana, joten sadan vuoron jälkeen kuvio on sama kuin neljän vuoron jälkeen.



Kohtaan b) on olemassa lukuisia ratkaisuja. Esimerkiksi alla esitetty seitsemän mittainen diagonaali lyhenee jokaisella vuorolla molemmista päistä yhdellä, joten se katoaa kokonaan täsmälleen neljässä vuorossa.