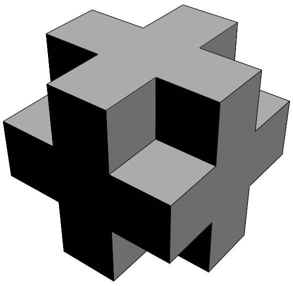
7-luokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 23.4.2016

Ratkaisuja

1. Sahataan $3 \times 3 \times 3$-kuution jokaisesta nurkasta pois $1 \times 1 \times 1$-kokoinen pienempi kuutio. Laske syntyneen kappaleen pinta-ala ja tilavuus. Hahmottamisen helpottamiseksi alla on kuva kappaleesta.



Ratkaisu. Alkuperäisen kuution tilavuus oli 27. Jokaisesta 8:sta nurkasta sahattiin pois 1 kokoinen kuutio. Näin ollen jäljelle jääneen kappaleen tilavuus on $27 - 8 = 19$ tilavuusyksikköä.

Alkuperäisessä kuutiossa oli 6 sivua, jokainen pinta-alaltaan 9, yhteensä siis $9 \cdot 6 = 54$. Sahattaessa jokaisesta nurkasta poistuu 3 pinta-alayksikköä, mutta uutta leikkauspintaa muodostuu saman verran. Näin ollen kappaleen pinta-ala on edelleen 54 pinta-alayksikköä.

2. Tiedetään, että

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 10^3 = 3025,$$

ja että

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3 = 44100.$$

Mitä onkaan

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + 19^3?$$

Tässä merkintä n^3 tarkoittaa luvun n kolmatta potenssia eli lukua $n \cdot n \cdot n$. Siis esimerkiksi $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Ratkaisu. Kysytyn luvun voi kirjoittaa annettujen lukujen avulla:

$$\begin{aligned}
&1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + 19^3 \\
&= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3 - \left(2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3\right) \\
&= 44100 - 8\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3\right) \\
&= 44100 - 8 \cdot 3025 = 44100 - 24200 = 19900.
\end{aligned}$$

3. Matti, Heta, Juha, Oona, Reetta ja Teemu kokoontuvat joka tiistai matematiikkakerhoon. Kerho kokoontuu pöytään, jonka ympärillä on kuusi tuolia. Matti istuu aina samalla paikalla. Heta haluaa istua Matin vieressä. Oona ja Reetta eivät tule toimeen, eivätkä siten halua istua vierekkäin. Monellako eri tavalla oppilaat voivat asettua pöytään?

Ratkaisu. Hetan paikalle on 2 vaihtoehtoa. Oona ja Reetta asettuvat neljälle jäljelläolevalle paikalle siten, että eivät istu vierekkäin. Tällaisia paikkapareja on $2 + 1 + 1 + 2 = 6$. Juha ja Teemu istuvan viimeisille kahdelle paikalle, heille jää 2 permutaatiota. Yhteensä erilaisia istumajärjestyksiä on $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$.

4. Aleksilla on paljon mustia ja valkoisia kuulia. Hän laittaa niitä jonoon noudattaen seuraavia sääntöjä. Jokainen kuula on samanvärinen kuin viides sen jälkeen tuleva kuula (jos tällainen kuula on olemassa - jono voi päättyä aiemmin eikä tätä sääntöä voida soveltaa). Lisäksi jokainen kuula on samanvärinen kuin seitsemäs sitä edeltävä kuula (jos tällainen kuula on olemassa) Jos Aleksi käyttää vain yhtä väriä jonossa, hän siis ilman muuta tulee noudattaneeksi näitä sääntöjä. Mutta voiko Aleksi tehdä kuinka pitkiä 2-värisiä jonoja tahansa näitä sääntöjä noudattaen? Jos voi, niin miten? Jos ei voi, niin kuinka pitkän 2-värisen jonon hän voi tehdä?

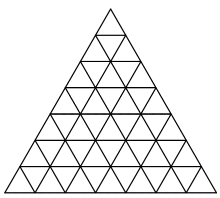
Ratkaisu. Osoittautuu, että mikä tahansa jono, jossa on vähintään 11 kuulaa on väistämättä yksivärinen. Numeroidaan jonon kuulat $1, 2, \ldots$. Yhdentoista kuulan jonossa sääntöjen mukaan seuraassa listassa aina kaksi peräkkäin mainittua kuulaa ovat sääntöjen mukaan keskenään samanväriset:

$$5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7.$$

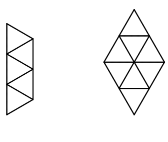
Tässä listassa esiintyvät kaikki luvut $1, \ldots, 11$, joten Aleksin 11 kuulan jonossa kaikki kuulat ovat samanvärisiä. Pidemmässä jonossa törmätään samaan ongelmaan. Jonon 11 ensimmäistä ovat kaikki samanvärisiä. Toistamalla kuvattu päättely paikoissa 2–12 olevien 11 kuulan jonolle nähdään, että myös kahdestoista kuula on samanvärinen kuin muut jne.

Sitä vastoin 10 kuulan jonossa voidaan paikkoihin $4, 9, 2, 7$ laittaa musta ja paikkoihin $5, 10, 3, 8, 1, 6$ valkoinen kuula (tai toisinpäin) ilman että sääntöjä rikotaan.

5. Tarkastellaan tällaista tasasivuisista kolmioista muodostuvaa ruudukkoa:



Voiko tämän ruudukon laatoittaa seuraavan muotoisilla laatoilla?



Kuten tavallista laatoitettaessa, emme salli laattojen menevän päällekkäin, emmekä ylittää ruudukon reunaa.

Ratkaisu. Oletetaan, että laatoitus olisi mahdollinen, ja oletetaan, että jossakin sellaisessa laatoituksessa olisi x kappaletta pienempää laattaa ja y kappaletta suurempaa laattaa. Ruudukossa on 49 ruutua, eli on oltava $5x + 8y = 49$. Varmasti y on jokin luvuista 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6, jolloin $5x$ olisi vastaavasti jokin luvuista 49, 41, 33, 25, 17, 9 ja 1. Koska $5x$ on varmasti viidellä jaollinen, on oltava $y = 3$ ja $5x = 25$, eli $x = 5$.

Seuraavaksi väritämme ruudukon ruudut mustalla ja valkealla siten, että kärjissä olevat nurkkaruudut väritetään mustiksi, ja kaksi ruutua väritetään eri väreillä silloin, kun niillä on yhteinen sivu. Tällöin syntyy 28 mustaa ja 21 valkeaa ruutua. Mutta isompi laatta peittää aina yhtä monta mustaa kuin valkeatakin ruutua, joten pienempien laattojen on peitettävä mustia ruutuja 7 enemmän kuin valkeita. Mutta koska jokainen pieni laatta peittää joko kolme valkeaa ja kaksi mustaa, tai sitten kolme mustaa ja kaksi valkeaa ruutua, olisi pienempiä laattoja pakko käyttää ainakin 7 kappaletta, eli viisi laattaa ei riittäisi. Täten laatoitus ei ole mahdollista.