Helsingin seitsemäsluokkalaisten finaali 2017
Ratkaisuja

1. Laske $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{10}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)$.

Ratkaisu. Laventamalla kaikki nimittäjät luvuksi 10 ja sieventämällä saadaan

$$\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{10}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{8}{10} - \frac{5}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

2. Laske $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{49}\right)$.

Ratkaisu. Nimittäjät 4, 9, 16, 25, 36 ja 49 ovat neliöt 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 ja 7^2. Muistaen, että kokonaisluvulle n pätee aina $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, voimme helposti sieventää

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\\
&= \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\frac{6^2-1}{6^2}\cdot\frac{7^2-1}{7^2}\\
&= \frac{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\cdot5\cdot7\cdot6\cdot8}{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5\cdot5\cdot6\cdot6\cdot7\cdot7} = \frac{1\cdot8}{2\cdot7} = \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

3. Muodostetaan numeroista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 9 neljä kaksinumeroista alkulukua siten, että kutakin numeroa käytetään vain kerran. Mikä on näiden neljän alkuluvun summa? (Kokonaisluku $p > 1$ on alkuluku, jos luku p on jaollinen vain luvuilla 1, -1, p ja $-p$. Esimerkiksi luvut 2 ja 7 ovat alkulukuja, kun taas luvut $4 = 2\cdot2$ ja $6 = 2\cdot3$ eivät ole.)

Ratkaisu. Kaksinumeroinen luku, joka päättyy numeroon 2, 4 tai 6 on aina jaollinen kahdella, joten se ei voi olla alkuluku. Samoin jos kaksinumeroinen luku päättyy numeroon 5, luku on jaollinen viidellä eikä voi olla alkuluku. Todetaan siis, että numeroiden 2, 4, 5 ja 6 on oltava kymmeniä merkitseviä numeroita, jolloin numerot 1, 3, 7 ja 9 merkitsevät yksiköitä. Summa voidaan laskea ilman että alkulukuja etsitään: $20 + 40 + 50 + 60 + 1 + 3 + 7 + 9 = 190$.

4. Olkoon $E(x)$ jokin lauseke, joka on määritelty kaikille kokonaisluvuille x, ja jolle pätee

$$E(x) + 2\cdot E(-x) = 3\cdot x,$$

niin ikään kaikille kokonaisluvuille x. Laske $E(1)$. (Esim. jos $F(x) = 2\cdot x^2 - 4\cdot x + 3$, niin $F(-x) = 2\cdot(-x)^2 - 4\cdot(-x) + 3$ ja $F(1) = 2\cdot1^2 - 4\cdot1 + 3$.)

Ratkaisu. Tiedämme siis, että

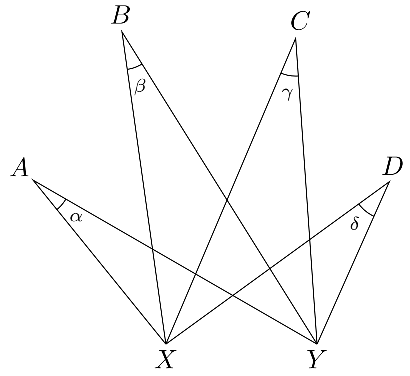
$$E(1) + 2\cdot E(-1) = 3, \quad \text{ja että} \quad E(-1) + 2\cdot E(1) = -3.$$

Siispä

$$-9 = 2\cdot(-3) - 3 = 2\cdot E(-1) + 4\cdot E(1) - E(1) - 2\cdot E(-1) = 3\cdot E(1),$$

ja on oltava $E(1) = -3$.

5. Laske β ja γ, kun $\alpha = 21^\circ$, $\delta = 30^\circ$, $\angle BXA = \angle CXB = \angle DXC$ ja $\angle BYA = \angle CYB = \angle DYC$.



Ratkaisu. Merkitään $\xi = \angle BXA = \angle CXB = \angle DXC$ ja $\eta = \angle BYA = \angle CYB = \angle DYC$, ja merkitään lisäksi janojen AY ja CX leikkauspistettä kirjaimella P. Koska kolmion kulmien summa on aina 180°, on $\angle APX = 180^\circ - \alpha - 2\xi$. Samoin $\angle YPC = 180^\circ - \gamma - 2\eta$. Lisäksi $\angle APX = \angle YPC$, eli $\alpha + 2\xi = \gamma + 2\eta$, ja edelleen $\xi - \eta = (\gamma - \alpha)/2$.

Nyt kysytty kulma β on eräs nelikulmion $BXPY$ kulmista, ja nelikulmion kulmien summa on aina 360°. Siispä

$$\begin{aligned}\beta &= 360^\circ - \angle CXB - \angle YPX - \angle BYP \\ &= 360^\circ - \xi - (180^\circ - \alpha - 2\xi) - 180^\circ - \eta \\ &= \alpha + \xi - \eta = \alpha + \frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}.\end{aligned}$$

Täysin samanlainen argumentti osoittaa, että

$$\gamma = \frac{\beta + \delta}{2}.$$

Nyt sekä $\gamma = \beta/2 + \delta/2$ että $\gamma = 2\beta - \alpha$, eli

$$2\beta - \alpha = \gamma = \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}, \quad \text{ja edelleen} \quad \frac{3\beta}{2} = \alpha + \frac{\delta}{2}, \quad \text{ja siis} \quad \beta = \frac{2\alpha + \delta}{3}.$$

Samaten sekä $\beta = \alpha/2 + \gamma/2$ että $\beta = 2\gamma - \delta$, eli

$$2\gamma - \delta = \beta = \alpha/2 + \gamma/2, \quad \text{ja edelleen} \quad \frac{3\gamma}{2} = \alpha/2 + \delta, \quad \text{ja siis} \quad \gamma = \frac{\alpha + 2\delta}{3}.$$

Lopuksi

$$\beta = \frac{2\alpha + \delta}{3} = \frac{2 \cdot 21^\circ + 30^\circ}{3} = 24^\circ \quad \text{ja} \quad \gamma = \frac{\alpha + 2\delta}{3} = \frac{21^\circ + 2 \cdot 30^\circ}{3} = 27^\circ.$$