Oulun seudun 7-luokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 8. huhtikuuta 2017

Ratkaisuja

1. Olkoon A summa, jossa on laskettu yhteen kokonaisluvut $1,\ 2,\ 3, \ldots, 49,\ 50$, ja B summa, jossa on laskettu yhteen kokonaisluvut $11,\ 12,\ 13, \ldots, 59,\ 60$. Mitä on $A - B$?

Ratkaisu. Kukin summassa B esiintyvä luku saadaan, kun summassa A olevaan vastaavaan lukuun lisätään 10. Molemmissa summissa lukuja on yhteensä 50 kappaletta. Siis $A - B = -10 \cdot 50 = -500$.

Vaihtoehtoisesti voi laskea ensin summat A ja B ja sitten niiden erotuksen: $A - B = \frac{51 \cdot 50}{2} - \frac{71 \cdot 50}{2} = 1275 - 1775 = -500$.

Vielä yksi nopea laskutapa on huomata, että summissa A ja B esiintyy samat luvut $11,\ 12, \ldots,\ 49,\ 50$, jotka supistuvat erotuksesta pois. Jäljelle jäävä lasku on alkuperäistä huomattavasti lyhyempi: $1+2+\cdots+10-(51+52+\cdots+60) = -500$.

2. Viisi matemaatikkoa tapaa toisensa ravintolassa. Kukin heistä kättelee jokaisen muun kanssa täsmälleen kerran. Montako kättelyä tapahtuu yhteensä? Entä jos matemaatikoita on 100?

Ratkaisu. Ensimmäinen matemaatikko kättelee neljää, toinen kolmea (muita kuin itseään ja ensimmäistä), kolmas kahta (muita kuin itseään ja kahta edellistä) ja neljäs yhtä matemaatikkoa. Viides matemaatikko on tällöin jo tullut kätelleeksi kaikkia. Kättelyiden lukumäärä on $1+2+3+4 = 10$. Kun matemaatikoita on 100, kättelyiden lukumäärä on tällöin $1+2+3+\cdots+98+99 = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$.

3. Pöydällä on rivissä kolme samannäköistä suklaakonvehtia, joissa on kaikissa eri täyte. Yksi konvehdeista sisältää pähkinää, yksi toffeeta ja yksi hilloa. Yksi seuraavista väitteistä on tosi ja kaksi muuta on valetta.

A: Ensimmäisen konvehdin sisällä on toffeeta.

B: Toisen konvehdin sisällä ei ole pähkinää.

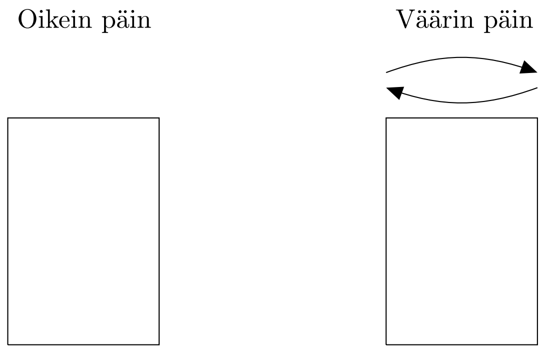
C: Kolmannen konvehdin sisällä ei ole toffeeta.

Mitä toisen konvehdin sisällä on?

Ratkaisu. Oletetaan, että A on totta ja B ja C ovat epätosia. Siis 1. konvehti on toffeeta. Tällöin 3. ei voi olla toffeeta, jolloin myös C on totta, mikä on ristiriita. Oletetaan nyt, että C on totta, jolloin A ja B ovat epätosia. Silloin 1. ja 3. eivät kummatkaan ole toffeeta. Siis 2. on oltava toffeeta. Mutta tällöin B onkin totta, mikä on jälleen ristiriita.
Ainoa vaihtoehto siis on, että B on totta ja A ja C epätosia. Siis 3. on toffeeta, 1. on pähkinää ja 2. hilloa.

4. Matti osallistui matematiikkakilpailuun, jossa oli 15 monivalintatehtävää. Jokaisessa tehtävässä piti valita yksi viidestä vaihtoehdosta a, b, c, d tai e. Jokaisesta tehtävästä saa yhden pisteen. Vastausvaihtoehdot oli asetettu ruudukkoon. Matti vastasi jokaiseen tehtävään ruksaamalla täsmälleen yhden vaihtoehdon.

Sattumalta jokainen vastausvaihtoehto (a, b, c, d, e) esiintyi täsmälleen kolme kertaa oikeassa vastausrivissä. Kilpailun vastaukset tarkistettiin käyttäen pahvia, johon oli leikattu aukot kunkin oikean vaihtoehdon kohdalle. Kävi ilmi, että aukoista näkyi sama määrä rukseja riippumatta siitä, asettiko tarkistuspahvin oikein vai väärin päin Matin vastauspaperin päälle (ks. kuva). Selvitä tämän perusteella, mitkä pistemäärät ovat Matilla mahdollisia ja mitkä eivät.



Ratkaisu. Matti voi saada minkä tahansa pistemäärän välillä 0-9, mutta ei sen enempää. Tapoja asetella ruksit ruudukkoon on useita, tässä eräs ratkaisu:
0-3 pistettä: Kun oikea vastaus on a, b, d tai e, Matti vastaa c. Tällöin saadaan 12 tehtävää joissa ei näy ruksia (kumminkaan päin). Pistemäärät 0-3 saadaan aikaan, kun Matti vastaa 0-3 kertaa c niissä tehtävissä, joissa oikea vastaus on c.
4-6 pistettä: Matti vastaa a kaikkiin tehtäviin, joiden oikea vastaus on a tai e. Näin saadaan molemmin päin 3 ruksia näkyviin. Matti vastaa c kaikkiin tehtäviin, joiden oikea vastaus on b tai d (0 ruksia molemmin päin). Yhteensä 4-6 ruksia saa näkyviin, kun vastaa vielä 1-3 kertaa c tehtävissä, joiden oikea vastaus on c.
7-9 pistettä: Matti vastaa a kaikkiin tehtäviin, joiden oikea vastaus on a tai e, ja b kaikkiin tehtäviin, joiden oikea vastaus on b tai d. Näin saadaan molemmin päin 6 ruksia näkyviin. Yhteensä 7-9 ruksia saa näkyviin, kun vastaa vielä 1-3 kertaa c tehtävissä, joiden oikea vastaus on c.
Osoitetaan vielä, että **enempää pisteitä ei voi saada:** 10 pistettä saadakseen täytyisi olla ainakin 7 ruksia näkyvissä niissä tehtävissä joissa vastaus ei ole c. Tällaisia tehtäviä on 12. Myös väärin päin rukseja pitäisi näkyä 7, mikä on mahdotonta, koska rukseja tarvittaisiin tällöin vähintään 14.

5. Kuningas Arthur valitsee ritareistaan yhden sotapäälliköksi seuraavalla tavalla: Ritarit istuvat pyöreän pöydän ympärille. Arthur kulkee pöydän ympäri myötäpäivään. Ensimmäiselle ritarille hän sanoo: “Olet mukana”. Toiselle hän sanoo: “Putoat pelistä”. Hän jatkaa pöydän kiertämistä tiputtaen aina joka toisen ritarin pelistä pois. Pudonneet ritarit nousevat heti pöydästä. Arthur kiertää pöytää niin kauan, että jäljellä on vain yksi ritari, ja hänestä tehdään sotapäällikkö.

Jos pöydän ympärillä istuu esimerkiksi 5 ritaria, niin pelistä putoaa ensin 2. ritari, sitten 4., 1. ja 5. ritari. Voittaja on tällöin kolmas ritari. Jos pöytään istuu 10 ritaria, niin monennellako paikalla istuva ritari valitaan sotapäälliköksi? Entä kun ritareita on 32? Entä 36? Miksi?

Ratkaisu. Kymmenen hengen peli on helppo pelata käsin. Voittaja on 5. ritari: Pudonneet ritarit ovat järjestyksessä 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1 ja 9.
32 ritaria: Ensimmäisenä putoavat kaikki parilliset, jolloin jäljelle jää 16 ritaria ja aloitamme pelin taas 1:stä. Samalla tavalla 16 ritarista putoaa puolet pois, jäljelle jää 8 ja jälleen aloitetaan ensimmäisestä. Taas puolet pois ja jäljellä on 4 ritaria, sitten 2 ja lopulta 1. Yhden hengen pöydässä 1. ritari tietysti voittaa.
36 ritaria: Luku on parillinen, joten voidaan tehdä puolitus kuten edellisessä kohdassa. Ensimmäisenä putoavat parilliset. Jäljelle jää 18 ritaria. Jälleen parillinen luku, jolloin voidaan puolittaa. Seuraavalla kierroksella putoavat muotoa $4k + 3$ olevat numerot, missä $k = 0, 1, 2, \ldots$ Jäljelle jää nyt 9 ritaria. Tämän pelin voi pelata käsin ja todeta, että 9 ritarin pöydässä 3. ritari voittaa. Lopuksi huomioidaan, että tässä yhdeksän hengen pelissä ritarien numerot ovat muotoa $4k + 1$, sillä parilliset ja muotoa $4k + 3$ olevat ritarit ovat pudonneet. “Kolmas” ritari on siis alkuperäisen pöydän $4 \cdot 2 + 1 = 9$. ritari.