Oulun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 1.4.2023

1.

a) Laske

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}.$$

b) Laske

$$\frac{1+2}{15} \cdot \frac{3+4}{11} \cdot \frac{5+6}{7} \cdot \frac{7+8}{3}.$$

Ratkaisu.

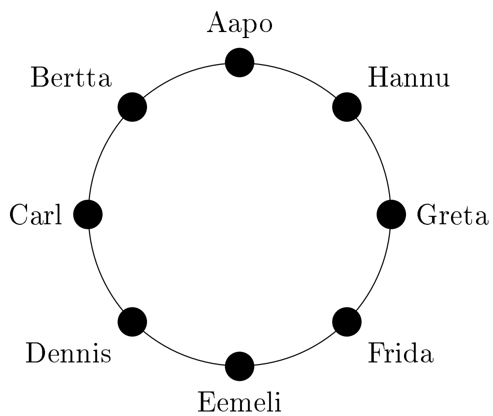
a)

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{1+2}{15} \cdot \frac{3+4}{11} \cdot \frac{5+6}{7} \cdot \frac{7+8}{3} &= \frac{3}{15} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7} \cdot \frac{15}{3} \\ &= \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}{15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15} = 1.\end{aligned}$$

2.



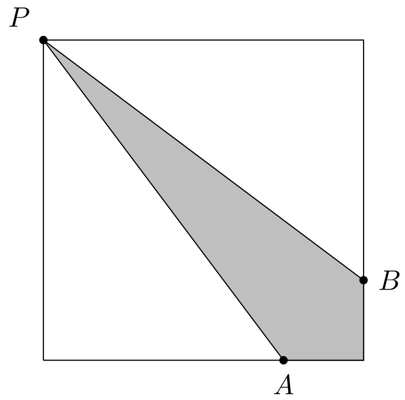
Koulun ruokalan pyöreän pöydän ääressä istuu kahdeksan oppilasta kuvan osoittamalla tavalla. Jokainen heistä juo joko vettä, mehua tai limua. Yksikään oppilaista ei juo samaa juomaa kuin kummallakaan puolella hänen vieressään istuva oppilas, tai häntä täsmälleen vastapäätä istuva oppilas. Lisäksi tiedetään, että

- Eemeli juo mehua,
- Aapo ei juo samaa juomaa, kuin Dennis tai Carl,
- Dennis ei juo vettä.

Mitä kukin oppilaista juo?

Ratkaisu. Koska Dennis istuu Eemelin vieressä, ja tiedetään, että **Eemeli juo mehua** ja Dennis ei juo vettä, niin **Denniksen on juotava limua**. Koska Aapo istuu Eemeliä vastapäätä, tiedetään, että Aapo ei juo mehua. Aapo ei myöskään juo samaa juomaa kuin Dennis, joten Aapo ei juo limua. Näin ollen **Aapon juo vettä**. Koska Carl ei juo samaa juomaa kuin Aapo tai Dennis, niin **Carl juo mehua**. Koska Bertta istuu Aapon ja Carlin välissä ja Aapo juo vettä ja Carl mehua, niin **Bertta juo limua**. Frida istuu Berttaa vastapäätä, ja Eemelin vieressä, ja Bertta juo limua ja Eemeli mehua, joten **Frida juo vettä**. Hannu istuu Dennistä vastapäätä ja Aapon vieressä ja Dennis juo limua ja Aapo vettä, joten **Hannu juo mehua**. Viimeiseksi, Greta istuu Hannun ja Fridan välissä, ja Hannu juo mehua ja Frida vettä, joten **Greta juo limua**.

3.



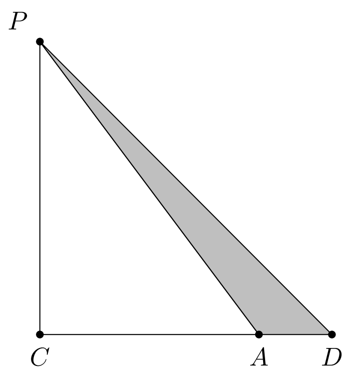
Neliön vasemmasta yläkulmasta P piirretään kuvan osoittamalla tavalla neliön sivuille kaksi yhtä pitkää janaa joiden päätepisteet ovat A ja B. Missä suhteessa piste A jakaa neliön alemman sivun kun harmaan alueen pinta-ala on $\frac{1}{4}$ koko neliön pinta-alasta?

Ratkaisu.

Tapa 1: Merkitään neliön vasenta alanurkkaa kirjaimella C, oikeaa alanurkkaa kirjaimella D ja neliön sivun pituutta kirjaimella ℓ. Tällöin neliön pinta-ala on ℓ^2. Koska janat PA ja PB ovat yhtä pitkät, kuvan valkoiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska neliön pinta-ala on kahden valkoisen kolmion pinta-alojen ja harmaan alueen pinta-alan summa, on valkoisten kolmioiden pinta-alojen summa $\ell^2 - \frac{1}{4}\ell^2 = \frac{3}{4}\ell^2$. Näin ollen alemman valkoisen kolmion pinta-ala on puolet tästä, eli $\frac{3}{8}\ell^2$. Merkitään valkoisen kolmion alemman sivun pituutta kirjaimella x. Tällöin kolmion pinta-alan kaavasta, ja yllä olevasta päättelyketjusta saadaan yhtälö

$$\frac{x \cdot \ell}{2} = \frac{3}{8}\ell^2.$$

Tästä saadaan ratkaistua x jakamalla yhtälö puolittain ℓ:llä ja kertomalla luvulla 2, jolloin $x = \frac{3}{4}\ell$. Näin ollen janan CA pituus on $\frac{3}{4}$ neliön sivun pituudesta jolloin janan AD pituus on $\frac{1}{4}$ neliön sivun pituudesta, eli piste A jakaa neliön alemman sivun suhteessa $3 : 1$.

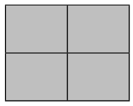


Tapa 2: Jakamalla neliö kahteen osaan sen lävistäjällä saadaan yllä olevan kuvan mukainen tilanne. Koska alkuperäisen kuvan janat PA ja PB ovat yhtä pitkät, on kuva symmetrinen neliön lävistäjän suhteen, joten yllä olevan kuvan harmaan kolmion pinta-ala on puolet alkuperäisen kuvan harmaan alueen pinta-alasta, eli $\frac{1}{8}$ koko neliön pinta-alasta. Koska yllä olevan kuvan koko kolmion pinta-ala on puolet alkuperäisen neliön pinta-alasta, niin valkoisen komion pinta-ala on $\frac{3}{8}$ koko neliön pinta-alasta. Koska valkoinen ja harmaa kolmio ovat yhtä korkeita, on kolmioiden kantojen pituuksien suhde sama kuin niiden pinta-alojen suhde, eli $\frac{3}{8} : \frac{1}{8} = 3 : 1$.

4. Tutkitaan kalenterin sivua, jossa näkyy yhden kokonaisen kuukauden päivät. Asetetaan kuvan mukainen 2×2 –laatta kalenterin päälle niin, että se peittää täsmälleen neljä kuukauden päivää (laatta ei siis saa mennä valkoisten alueiden päälle tai olla vinossa).

Osoita huolellisesti perustellen, että riippumatta siitä, mihin kohtaan kalenteria laatta asetetaan ja riippumatta siitä, mikä kuukausi kalenterissa näkyy, laatan peittämien neljän luvun summa on jaollinen neljällä.

		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		



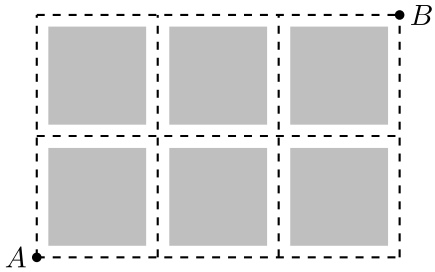
Tässä esimerkkinä maaliskuun 2023 kalenteri ja lukujen peittämiseen käytettävä laatta.

Ratkaisu. Merkitään kirjaimella n sitä lukua, joka jää laatan vasemman yläkulman alle. Havaitaan, että luvun n oikealla puolella on yhtä suurempi luku, eli $n+1$. Vasemman alakulman alle jäävä päivä on viikko päivän n jälkeen, joten tämä luku on $n+7$. Edelleen, oikeaan alakulmaan tulee tästä seuraava päivä, eli luku $n+8$. Neljän peitetyn luvun summa on siis

$$n + (n+1) + (n+7) + (n+8) = 4n + 16 = 4(n+4).$$

Tämä luku on selvästi jaollinen neljällä riippumatta siitä, mikä luku n on, eli riippumatta siitä, mihin kohtaan kalenteria laatta asetettiin tai mikä kuukausi kalenterissa näkyy.

5. Taksi ajaa miljoonakaupungissa pisteestä A pisteeseen B. Kukin tie (katkoviiva) on joko pohjois-etelä- tai itä-länsisuuntainen.



a) Yllä olevan kuvan tilanteessa piste B sijaitsee pisteestä A kaksi korttelia pohjoiseen ja kolme itään. Montako erilaista reittiä taksikuski voi valita, kun hän ajaa aina lyhyintä mahdollista reittiä?

b) Mietitään sitten tilannetta, jossa piste B sijaitseekin pisteestä A kaksi korttelia pohjoiseen ja N korttelia itään (luku N on vähintään kolme). Montako vaihtoehtoa lyhyimmäksi reitiksi tällä kertaa on?

Ratkaisu.

a) Mahdollisia lyhyimpiä reittejä on yhteensä $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ kpl. Reitit voi käydä läpi järjestelmällisesti piirtämällä tai listaamalla, esimerkiksi kuten alla (P tarkoittaa yhden korttelin siirtymää pohjoiseen ja I itään:

- $IIIPP$
- $IIPIP, IIPPI$
- $IPIIP, IPIPI, IPPII$
- $PIIIP, PIIPI, PIPII, PPIII$

b) **Tapa 1:** Listataan vaihtoehdot kirjaimien P ja I avulla kuten yllä. Tällä kertaa meillä on 2 kappaletta kirjainta P ja N kappaletta kirjainta I. Kukin eri kirjainjono vastaa yhtä lyhyimmistä reiteistä. Kysymys siis on, montako erilaista $N + 2$ kirjaimen jonoa näistä kirjaimista voidaan muodostaa.

- Jos ensimmäinen kirjain on P, voidaan muodostaa $N+1$ erilaista kirjainjonoa, sillä jälkimmäinen P voi olla mikä tahansa lopuista $N + 1$ kirjaimesta.
- Jos sen sijaan vasta toinen kirjain on P, voidaan muodostaa N erilaista kirjainjonoa.
- Jos vasta kolmas kirjain on P, saadaan $N - 1$ kirjainjonoa.

  $\vdots$
- Jos vasta kolmanneksi viimeinen kirjain on P, vaihtoehtoja on 2.
- Jos vasta toiseksi viimeinen kirjain on P, niin vaihtoehtoja on 1.

Laskemalla kaikki vaihtoehdot yhteen, saadaan lyhyimpien reittien määräksi

$$(N + 1) + N + \cdots + 3 + 2 + 1.$$

Tapa 2: Pohditaan ensin tilannetta, jossa $N = 4$. Jos nyt aloitetaan liikkumalla yksi kortteli itään, niin huomataan, että loppuosa kuljettavasta alueesta on sama kuin a)-kohdan alue, joten vaihtoehtoja on tässä tilanteessa yhteensä $1+2+3+4 = 10$. Jos taas aloitetaan liikkumalla yksi kortteli pohjoiseen, voi reitti jatkua viidellä tavalla. Yhteensä vaihtoehtoja on siis $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Entä kun $N = 5$? Jos aloitetaan liikkumalla yksi kortteli itään, niin huomataan, että päädytään edelliseen kohtaan, jossa vaihtoehtoja oli $1+2+3+4+5$. Jos taas aloitetaan liikkumalla pohjoiseen, on vaihtoehtoja $N + 1 = 6$. Yhteensä vastaukseksi tulee siis $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.

Sama päättely voidaan tehdä tuntemattomalla kirjaimella N. Jos nyt aloitetaan liikkumalla itään, päädytään edelliseen askeleeseen, jonka vastaus oli $1 + 2 + \cdots + N$. Jos taas aloitetaan liikkumalla yksi kortteli pohjoiseen, voi reitti jatkua $N + 1$ tavalla. Yhteensä vaihtoehtoja on siis

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N + (N + 1).$$

Huomautus: Vastauksen voi sieventää myös muotoon

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N + (N + 1) = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2},$$

mutta tätä muotoa ei vaadita täysiin pisteisiin.